



Filtre Bayésien parcimonieux

Application à l'identification d'effort

Mathieu AUCEJO, Julian GHIBAUDO, Olivier DE SMET

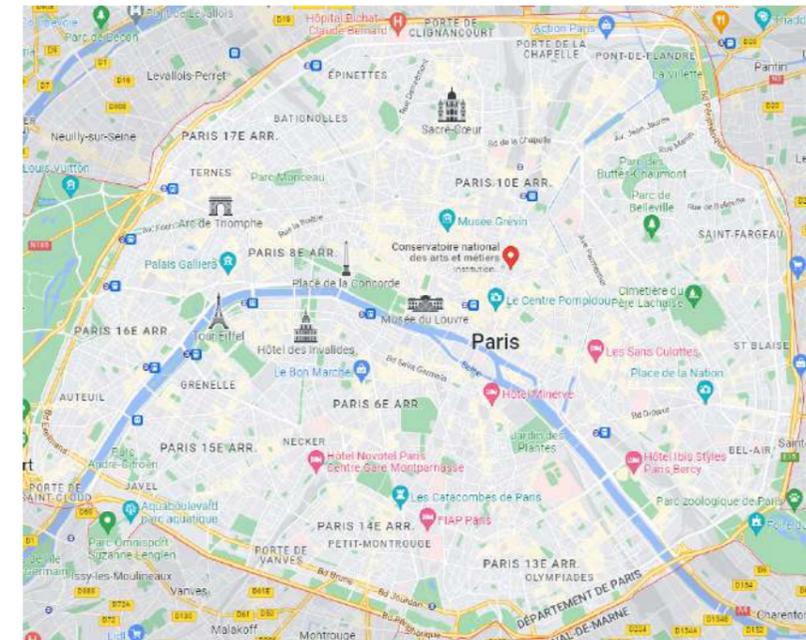
Qui suis-je ?



C'est moi !

- MCF HDR
- @ Le Cnam

le cnam



Qui suis-je ?

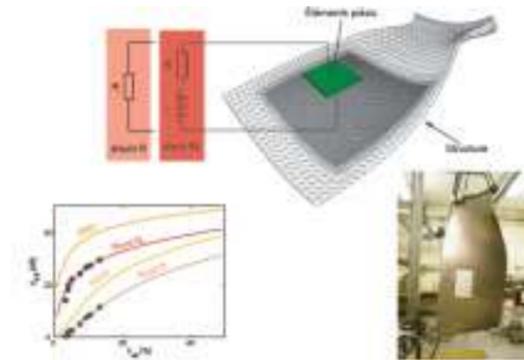


C'est moi !

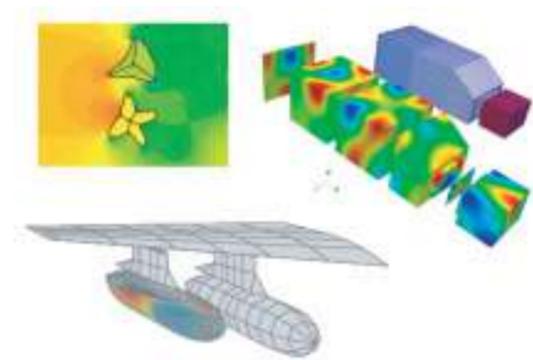
- MCF HDR
- @ Le Cnam
- @ LMSSC

✉ mathieu.aucejo@lecnam.net

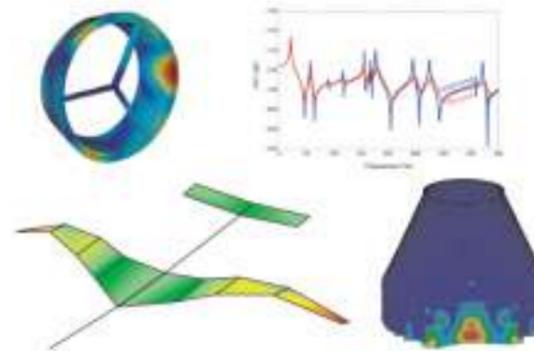
Smart structures
and adaptive interfaces



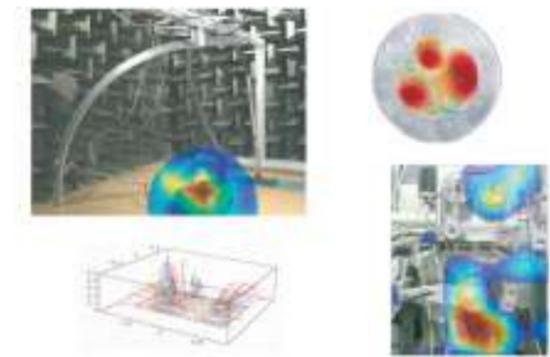
Fluid-structure interaction
and vibro-acoustics



Linear and nonlinear
structural dynamics



Source identification
and noise control



Sommaire

- 1 Généralités
- 2 État de l'art
- 3 Filtre Bayésien parcimonieux

Sommaire

1 Généralités

2 État de l'art

3 Filtre Bayésien parcimonieux

Éléments de contexte

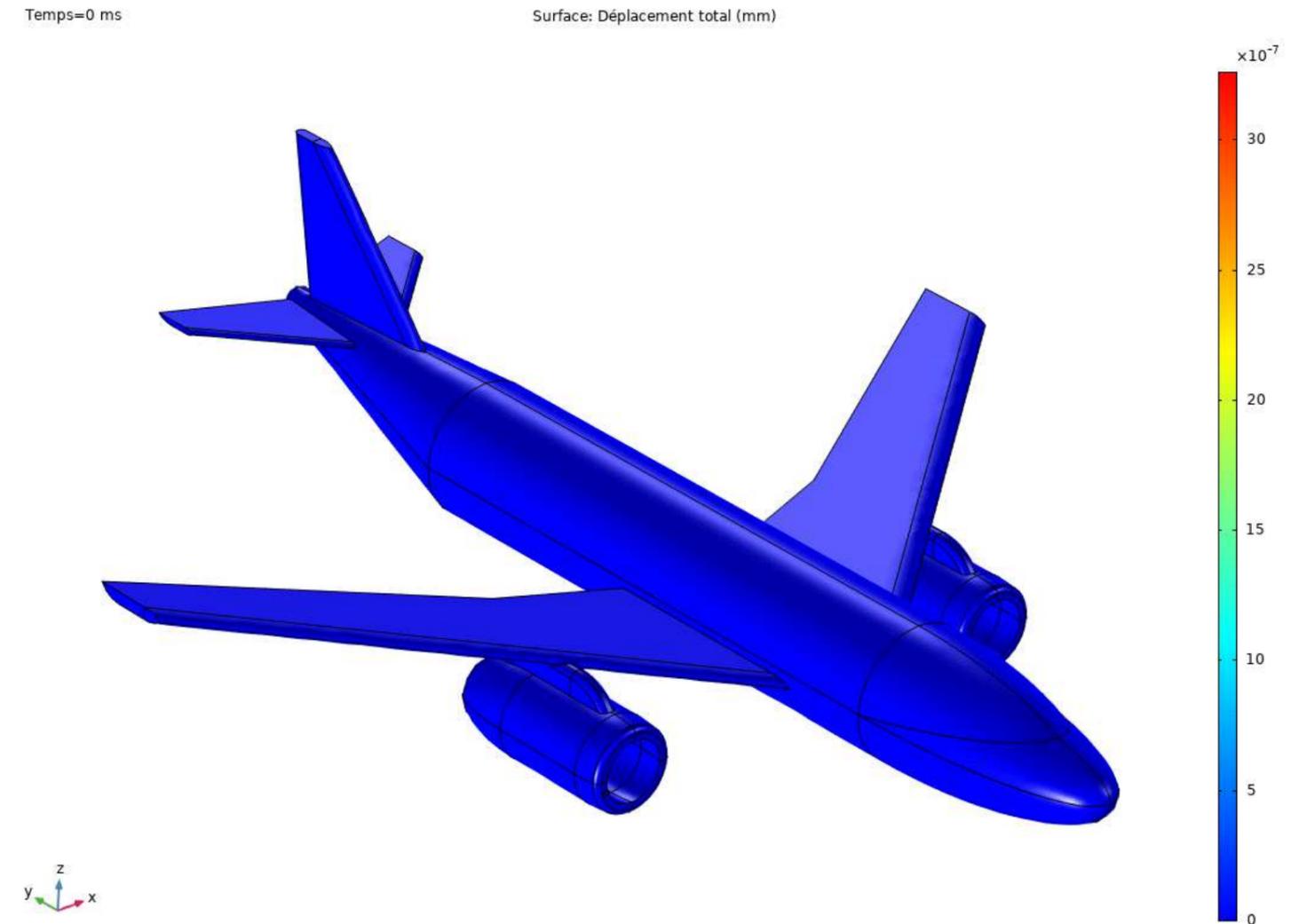
Effets indésirables des efforts non maîtrisés

- Défaillances structurelles
- Endommagement d'équipements

Considérations pratiques

- Méconnaissance des excitations / zones d'excitation
- Inaccessibilité des zones à la mesure directe d'efforts

Développement de méthodes inverses d'identification

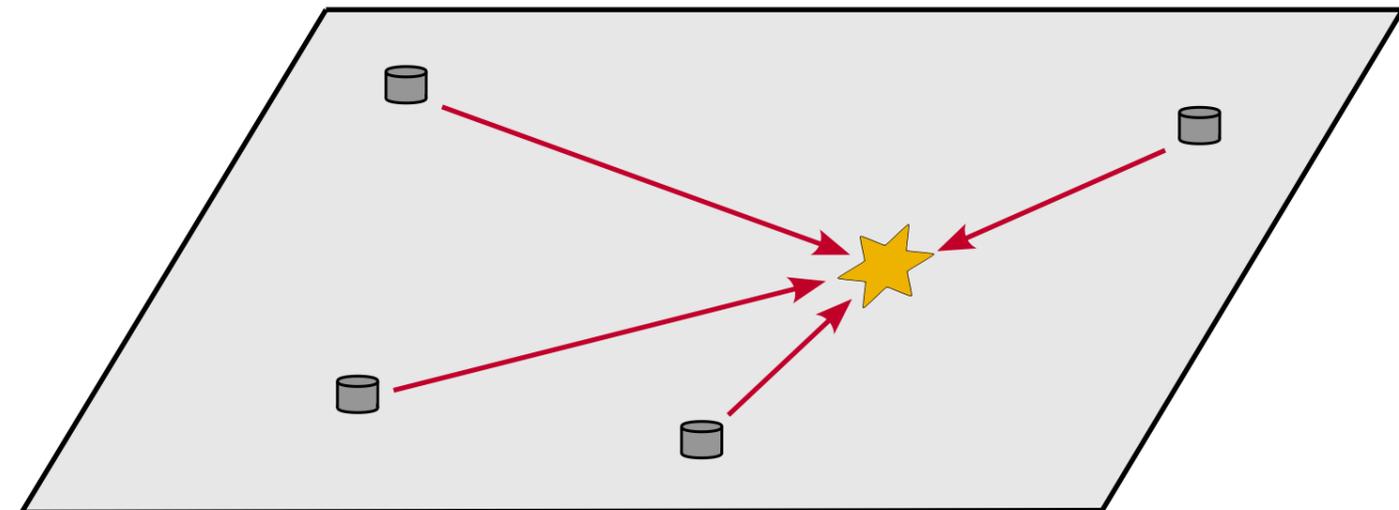


Définition

L'identification d'effort est un problème inverse, dont le but est de caractériser les sources d'excitation s'exerçant sur une structure mécanique à partir d'un ensemble de données mesurées

Types de problèmes rencontrés

1. Localisation



★ Position inconnue de la source

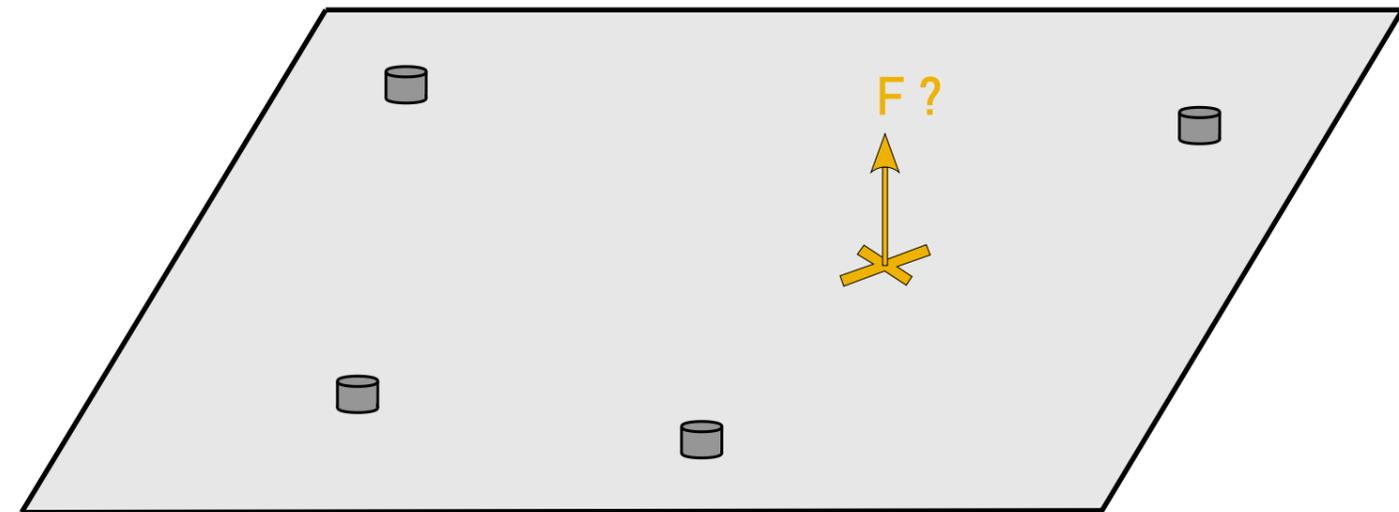
⌄ Capteur de vibrations

Définition

L'identification d'effort est un problème inverse, dont le but est de caractériser les sources d'excitation s'exerçant sur une structure mécanique à partir d'un ensemble de données mesurées

Types de problèmes rencontrés

1. Localisation
2. Quantification



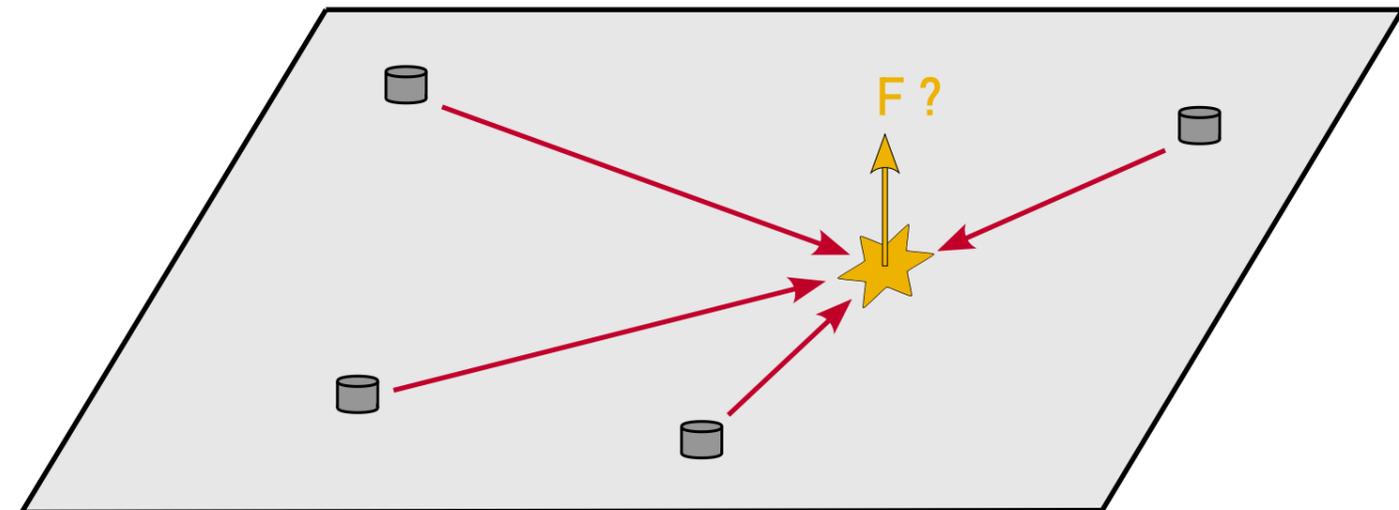
- ✘ Position connue de la source
- 🔊 Capteur de vibrations

Définition

L'identification d'effort est un problème inverse, dont le but est de caractériser les sources d'excitation s'exerçant sur une structure mécanique à partir d'un ensemble de données mesurées

Types de problèmes rencontrés

1. Localisation
2. Quantification
3. Reconstruction



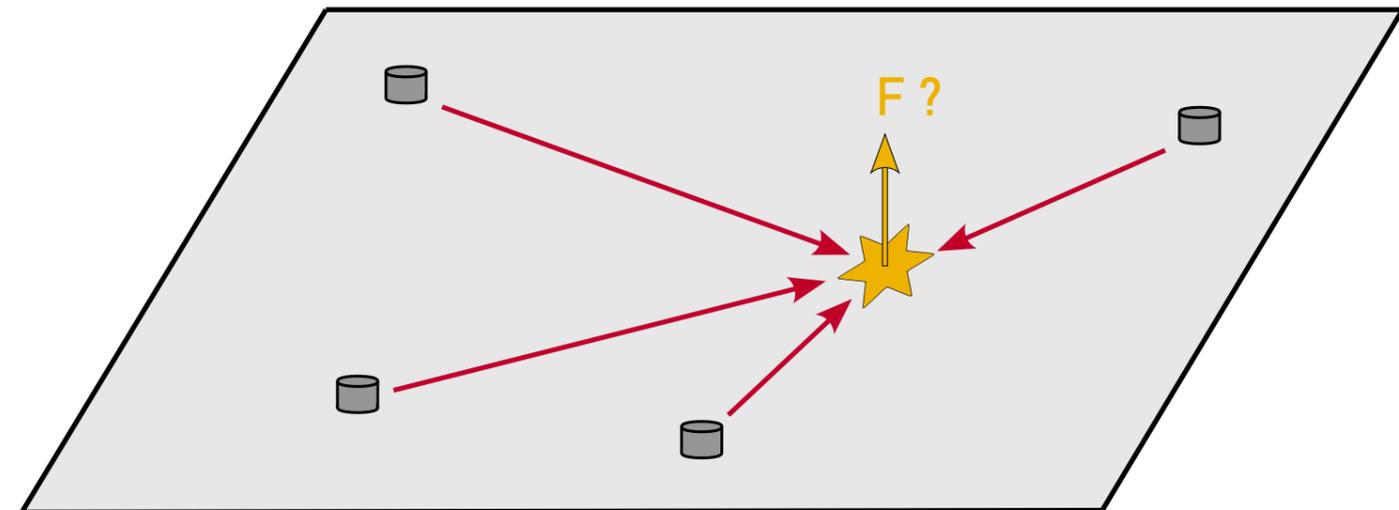
- ★ Position inconnue de la source
- 🗄 Capteur de vibrations

Définition

L'identification d'effort est un problème inverse, dont le but est de caractériser les sources d'excitation s'exerçant sur une structure mécanique à partir d'un ensemble de données mesurées

Types de problèmes rencontrés

1. Localisation
2. Quantification
3. Reconstruction
4. Séparation / Classification



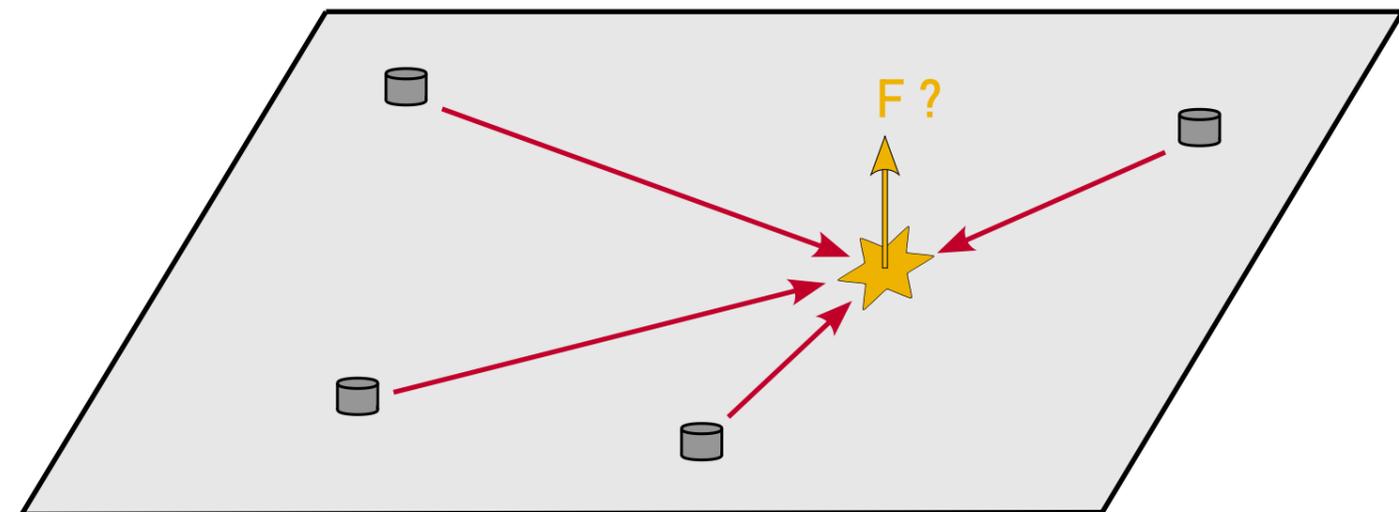
- ★ Position inconnue de la source
- 🗄 Capteur de vibrations

Définition

L'identification d'effort est un problème inverse, dont le but est de caractériser les sources d'excitation s'exerçant sur une structure mécanique à partir d'un ensemble de données mesurées

Types de problèmes rencontrés

1. Localisation
2. Quantification
3. **Reconstruction**
4. Séparation / Classification



- ★ Position inconnue de la source
- 🗄 Capteur de vibrations

Grandes familles de méthodes

1. Régularisation

- Régularisation additive / multiplicative
- Régularisation en norme ℓ_2 (Tikhonov), en norme ℓ_p , en norme mixte $\ell_{p,q}$
- Formulation Bayésienne (MAP et / ou échantillonnage)

2. Filtrage de l'équation de mouvement

- RIFF
- Champs virtuels

3. Apprentissage / Méta-modélisation

- Réseaux de neurones (ANN, CNN, RNN, LSTM, ...)

4. Filtrage récursif

- Programmation dynamique
- Filtrage / Lissage de Kalman
 - Estimation conjointe (Augmented Kalman Filter)
 - Estimation séquentielle (GDF, DKF, SBF, ...)
 - Fixed-lag, RTS

Restriction

Au cours de ce séminaire, on se restreint à l'étude des filtres récursifs Bayésiens de type Kalman, s'appuyant sur la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

- \mathbf{x}_k : Vecteur d'état à l'instant k
- \mathbf{u}_k : Vecteur d'entrée (excitation) à l'instant k
- \mathbf{y}_k : Vecteur des données mesurées à l'instant k
- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$: Matrices du système (supposé linéaire invariant)
- \mathbf{w}_k : Bruit Gaussien de process à l'instant k - *moyenne nulle, matrice de covariance* $\mathbf{Q}_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}$
- \mathbf{v}_k : Bruit Gaussien de mesure à l'instant k - *moyenne nulle, matrice de covariance* $\mathbf{R} = \sigma_y^2 \mathbf{I}$

Restriction

Au cours de ce séminaire, on se restreint à l'étude des filtres récursifs Bayésiens de type Kalman, s'appuyant sur la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

Les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} sont obtenues à partir de la discrétisation de la représentation continue du système d'état :

- **ZOH (excitation constante sur un pas de temps)**
- FOH (interpolation linéaire de l'excitation sur un pas de temps)
- Schéma de Newmark
- Schéma α -généralisé
- RK4

Discrétisation ZOH

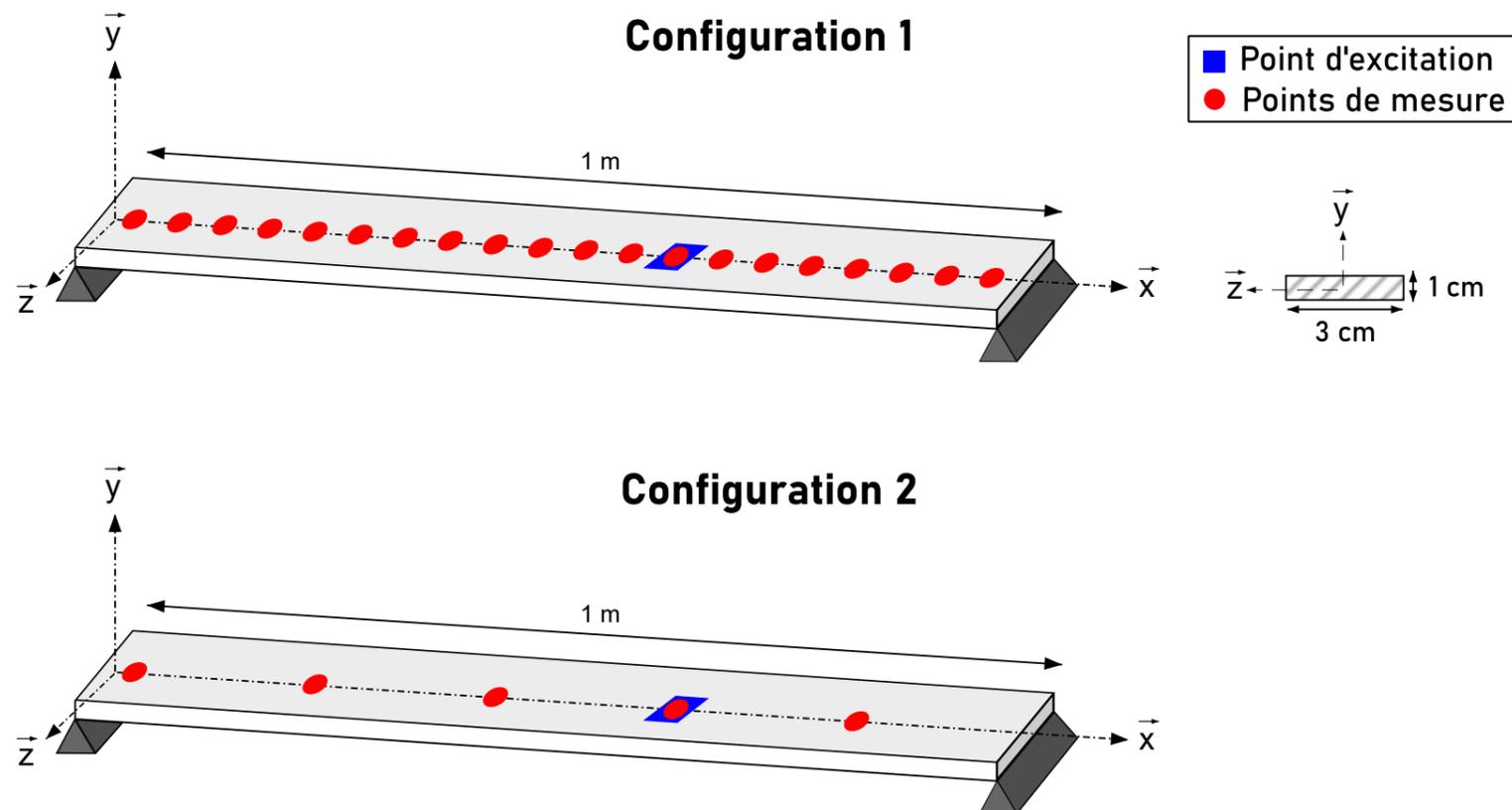
Sommaire

1 Généralités

2 État de l'art

3 Filtre Bayésien parcimonieux

Exemple fil rouge Poutre en flexion simplement appuyée



- Excitation "coup de marteau" ($f_c \approx 500$ Hz)
- Bruit de mesure - SNR = 25 dB
- 2 configurations - 1 capteur colocalisé avec l'excitation
 - 20 accéléromètres - $\Delta x = 4.7$ cm
 - 5 accéléromètres - $\Delta x = 18.9$ cm
- Génération des données - Schéma de Newmark
 - Base modale (7 modes, $f_7 \approx 1150$ Hz, $\eta = 1\%$)
 - Pas de temps : $h = 10 \mu s$

Pourquoi deux configurations ?

Conditions d'identifiabilité !

Conditions d'identifiabilité (Lourens et al. - 2012, Maes et al. - 2015)

1. **Observabilité** - satisfaite si tous les modes contenus dans le modèle contribuent aux réponses mesurées
2. **Contrôlabilité** - satisfaite si tous les modes sont excités par au moins une entrée
3. **Inversibilité instantanée** - satisfaite si seulement si $\text{rang}(\mathbf{D}) = n_u$
4. **Stabilité** - Les zéros de transmission finis λ_i du système sont stables, i.e. si $|\lambda_i| < 1$
5. **Unicité** - L'entrée d'un système avec au moins un zéro de transmission ne peut pas être identifiée de manière unique
6. **Stabilité numérique** - La stabilité numérique est assurée si $n_m \geq n_d \geq n_u$

Conditions d'identifiabilité (Lourens et al. - 2012, Maes et al. - 2015)

Configuration 1

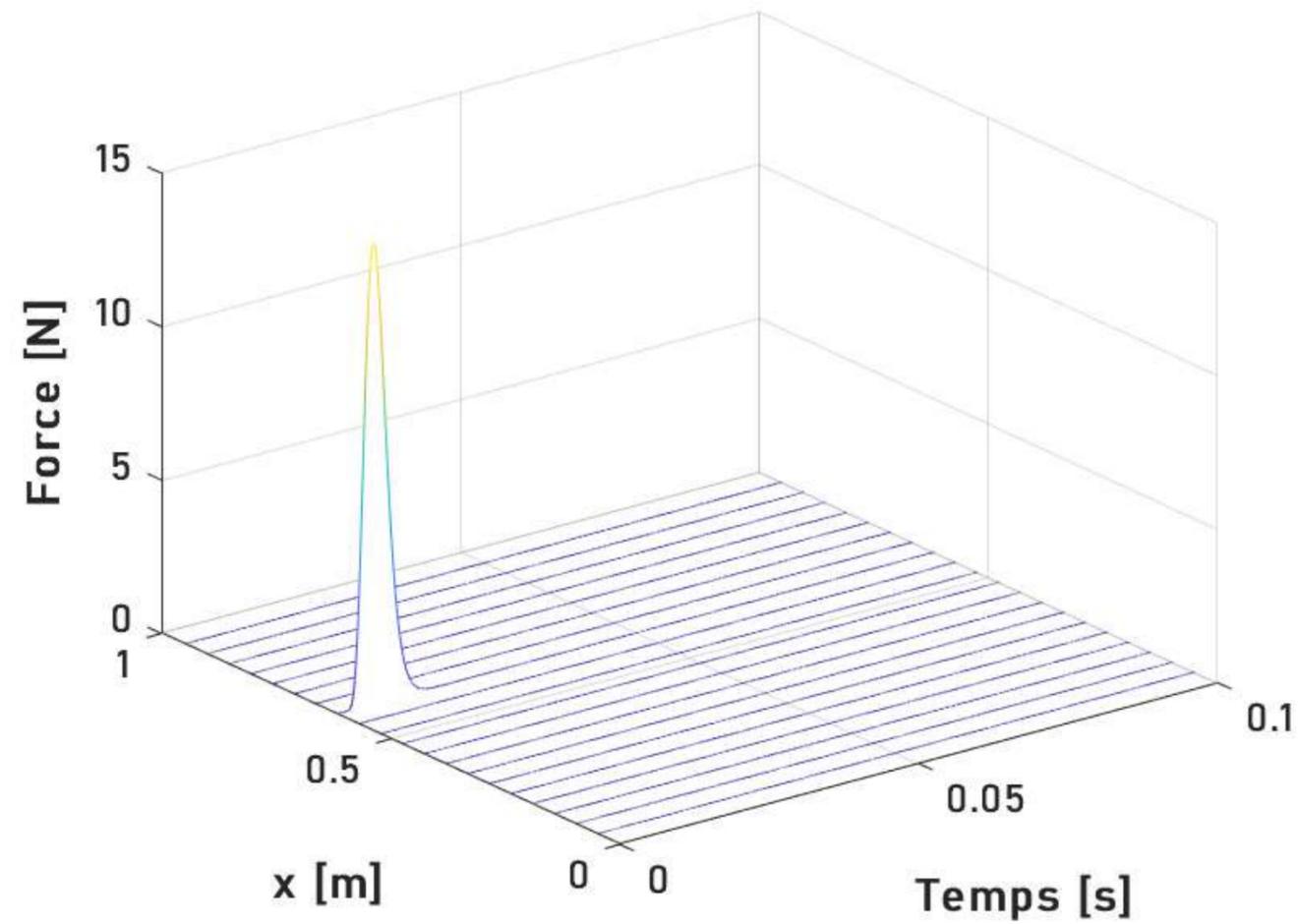
1. Observabilité ✓
2. Contrôlabilité ✓
3. Inversibilité instantanée ✗
4. Stabilité ✗
5. Unicité ✗
6. Stabilité numérique ✗

Configuration 2

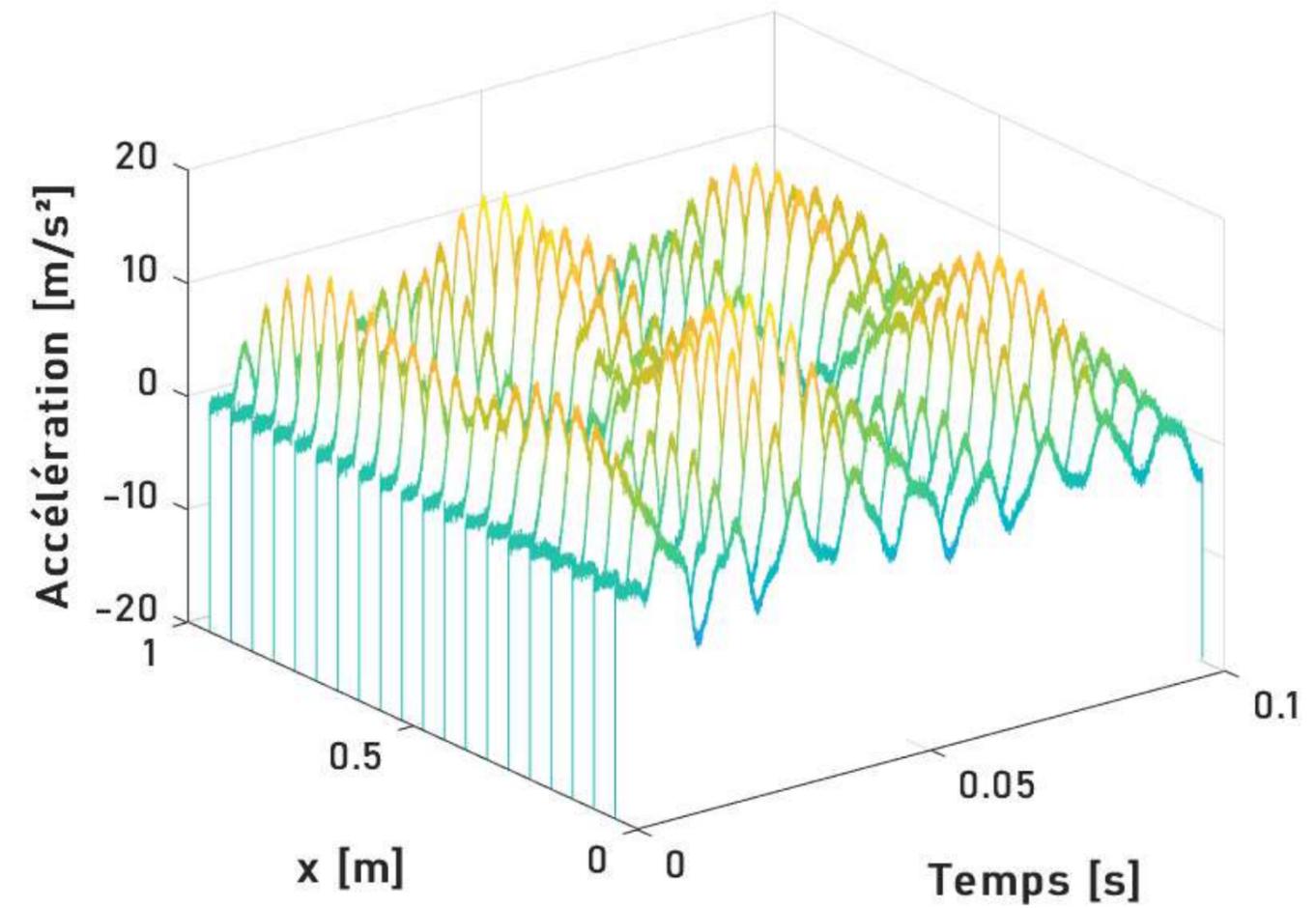
1. Observabilité ✓
2. Contrôlabilité ✓
3. Inversibilité instantanée ✓
4. Stabilité ✗
5. Unicité ✗
6. Stabilité numérique ✓

Objectif principal Configuration 1

Reconstruire

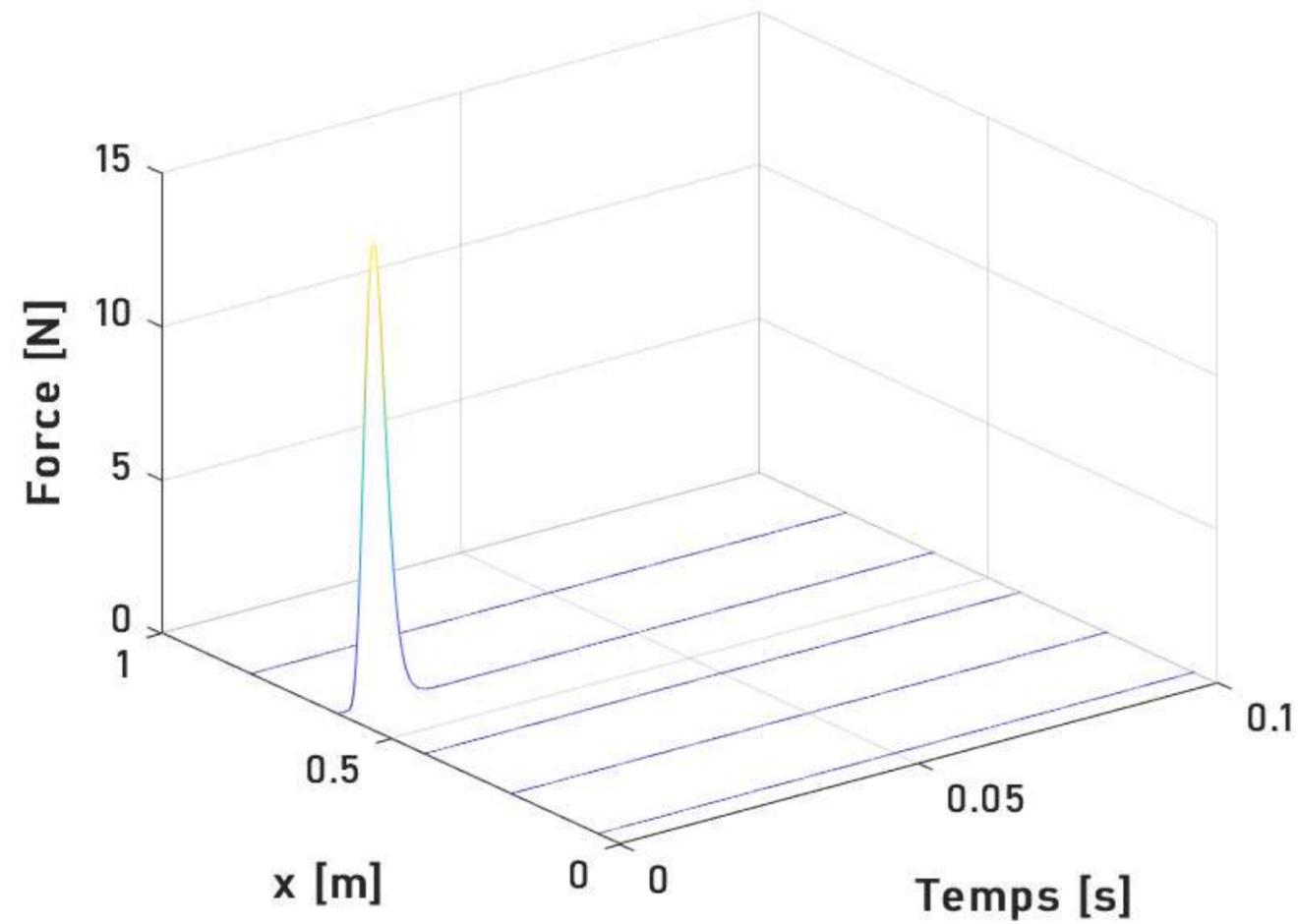


À partir de

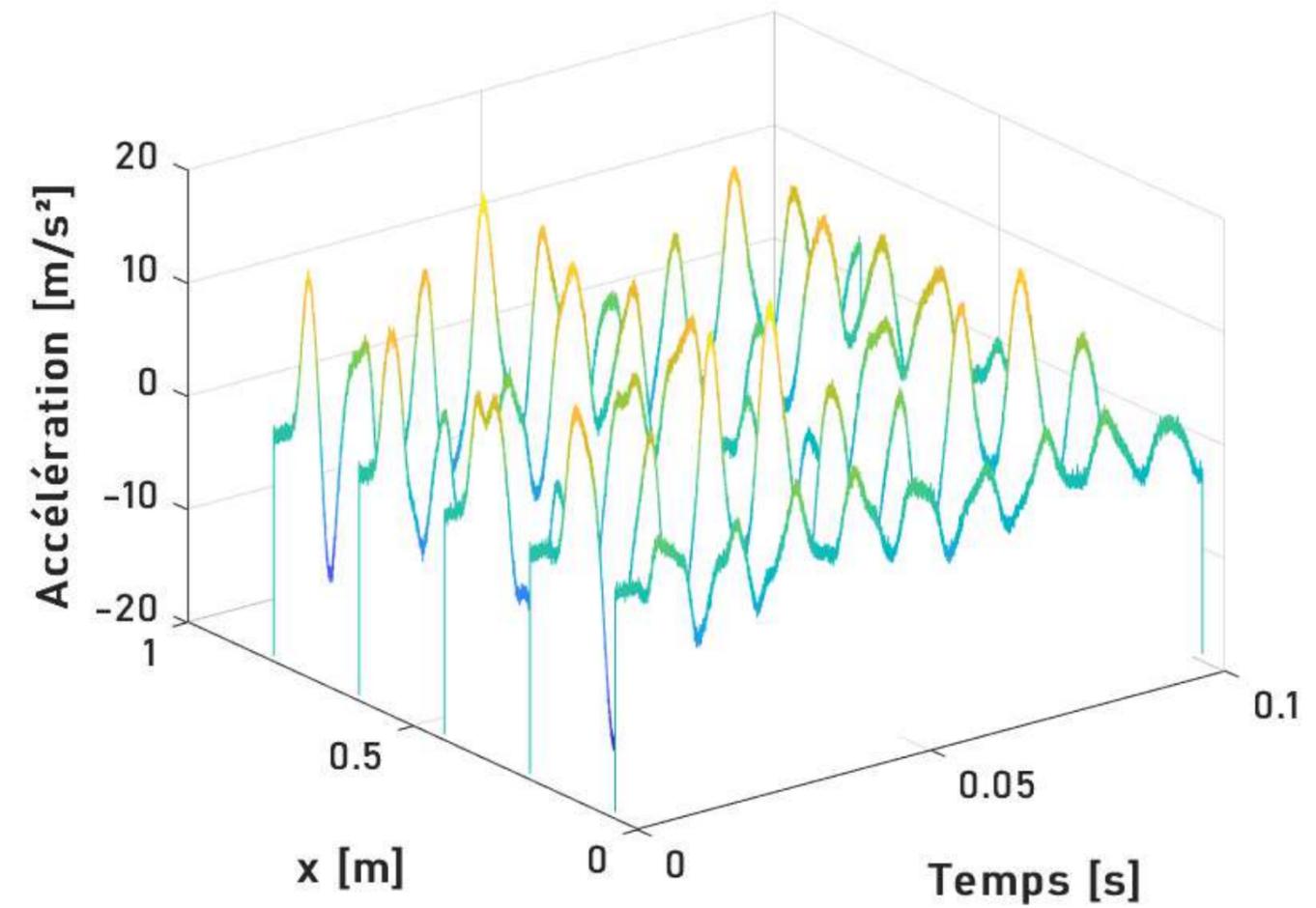


Objectif principal Configuration 2

Reconstruire



À partir de



Principaux filtres Augmented Kalman Filter (Lourens et al. - 2012)

Idée Ajouter une équation d'évolution fictive de la commande, afin de construire un état augmenté

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k^u \text{ avec } \mathbf{w}_k^u \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{0}, \mathbf{Q}_u = \sigma_u^2 \mathbf{I})$$

Représentation d'état augmentée

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_k^a + \mathbf{w}_k^a \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_k^a + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^a &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}, & \mathbf{w}_k^a &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_k^u \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_a &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}] \end{aligned}$$

Résolution Filtre de Kalman classique

Principaux filtres Augmented Kalman Filter (Lourens et al. - 2012)

Implémentation

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0^a, \mathbf{P}_0^a$

2. Prédiction de l'état

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^a = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^a = \mathbf{A}_a \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{A}_a + \mathbf{Q}_a \text{ avec } \mathbf{Q}_a = \text{diag}(\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_u)$$

3. Estimation de l'état

$$\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k^a \mathbf{C}_a^\top (\mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{P}}_k^a \mathbf{C}_a^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

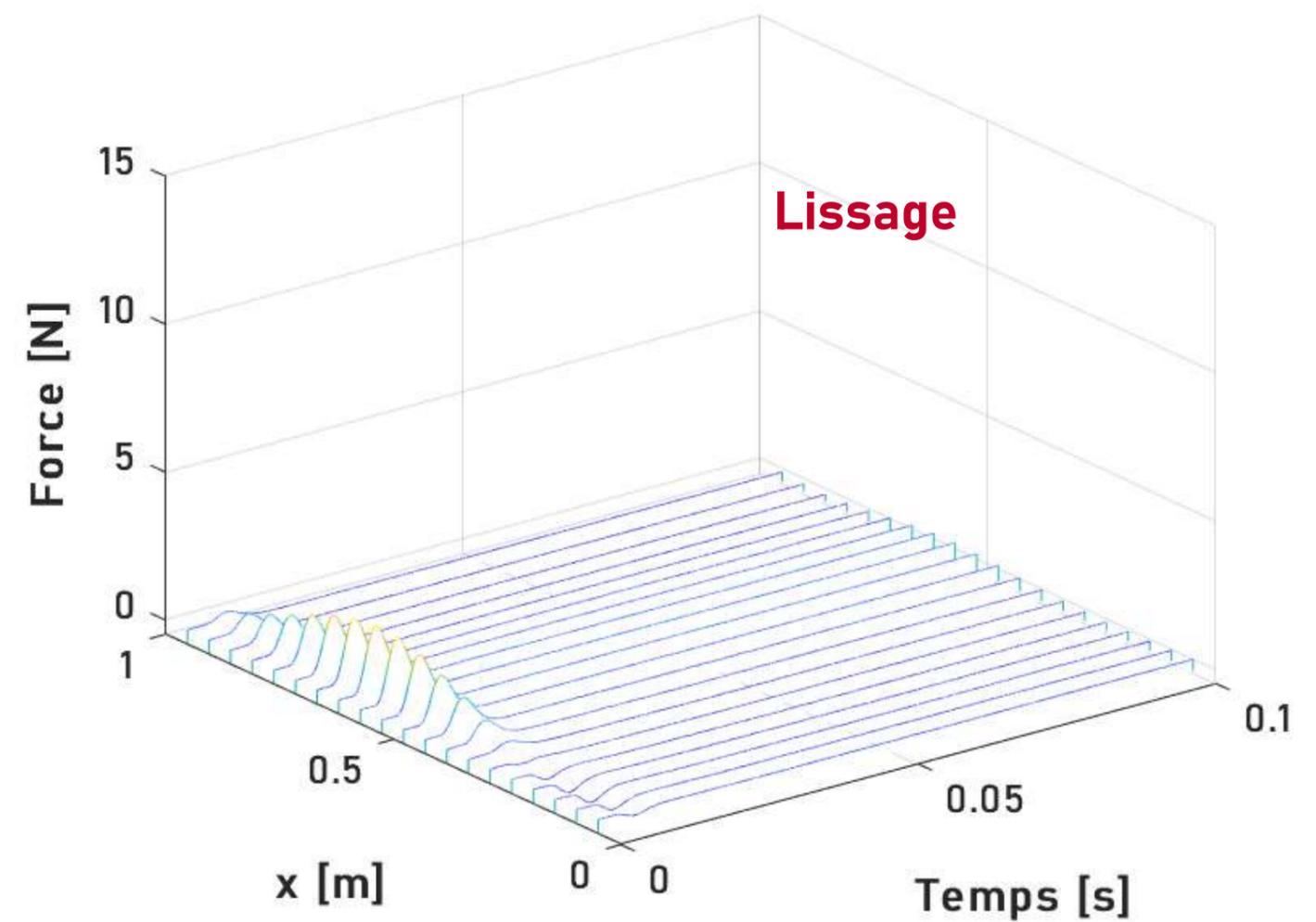
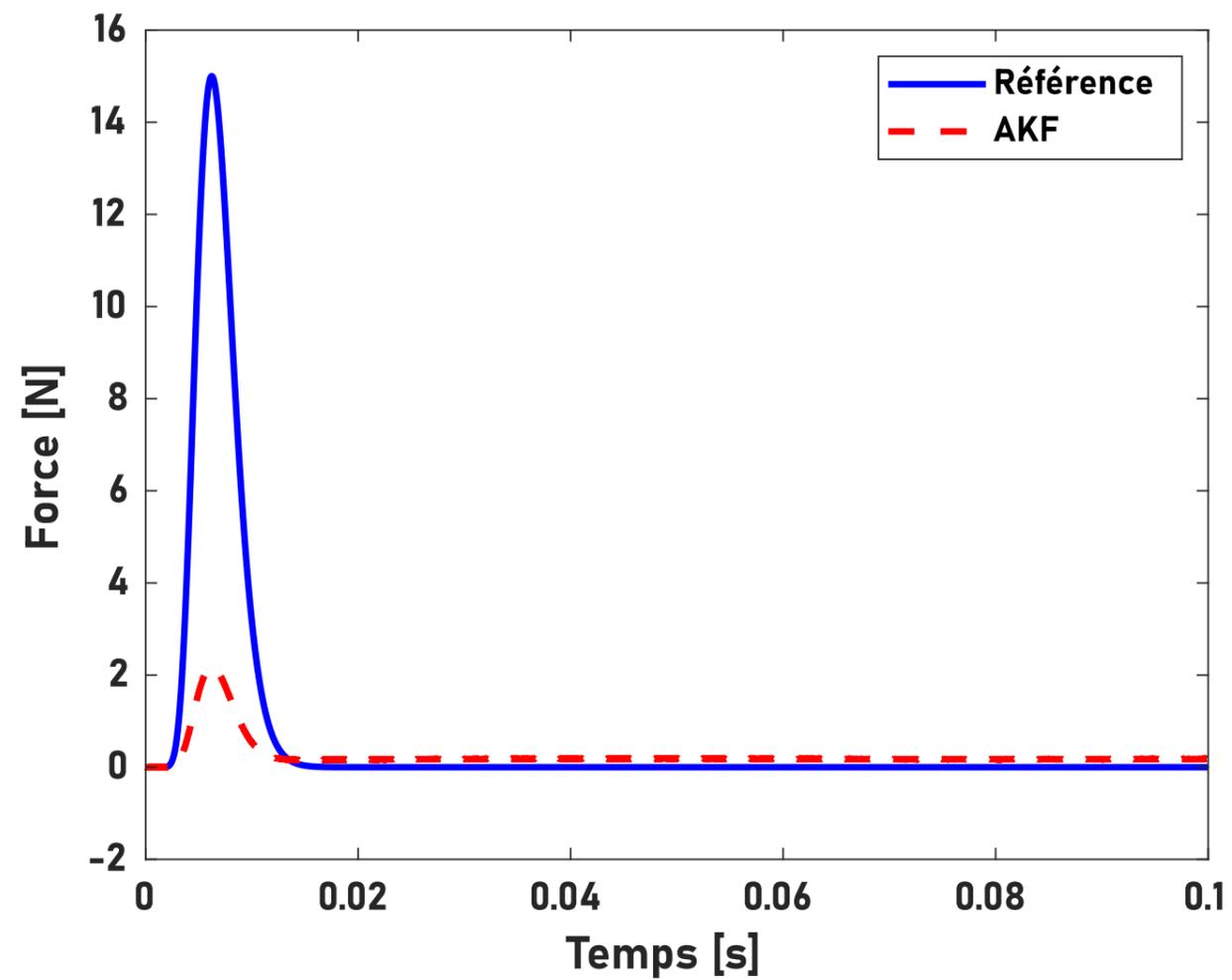
$$\hat{\mathbf{x}}_k^a = \tilde{\mathbf{x}}_k^a + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{x}}_k^a)$$

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_a) \tilde{\mathbf{P}}_k^a$$

Remarque σ_u^2 est sélectionnée automatiquement à partir d'une méthode a posteriori "maison"

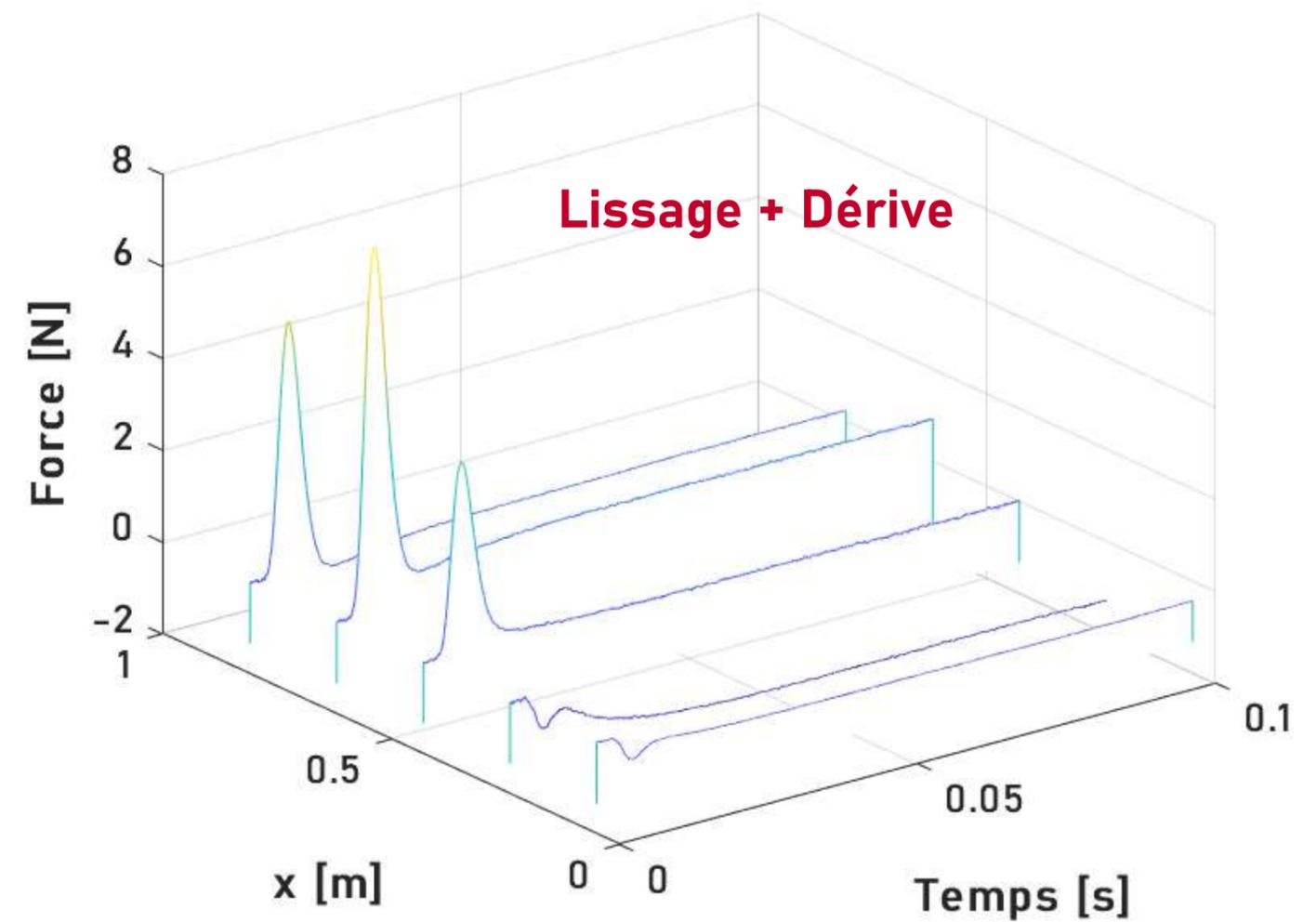
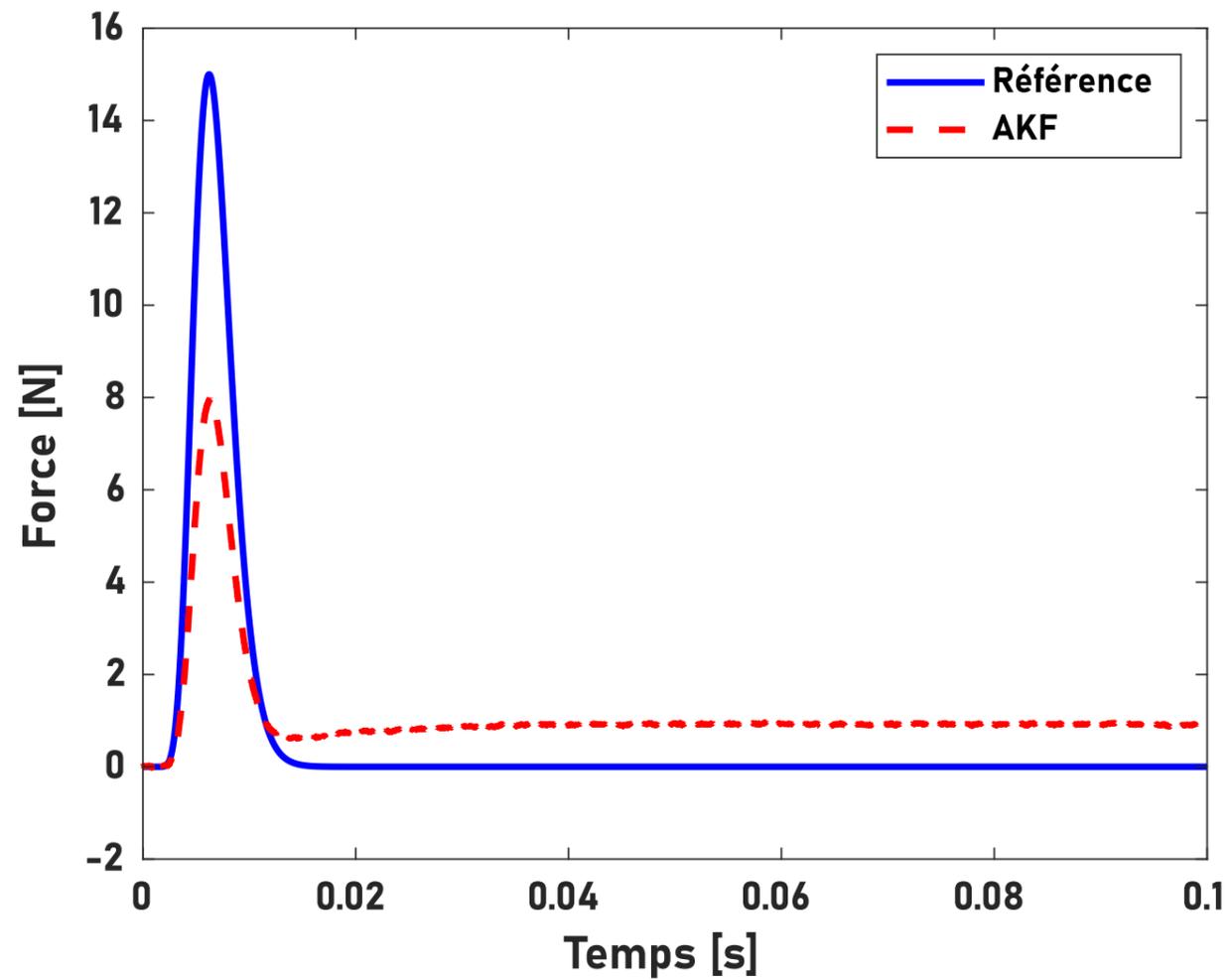
Principaux filtres Augmented Kalman Filter (Lourens et al. - 2012)

Application Configuration 1 - $\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^a = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{\sigma}_u^2 = 1.31 \times 10^{-5}$



Principaux filtres Augmented Kalman Filter (Lourens et al. - 2012)

Application Configuration 2 - $\hat{\mathbf{x}}_0^a = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^a = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{\sigma}_u^2 = 6.71 \times 10^{-5}$



Principaux filtres Gillijns and De Moor Filter (Gillijns and De Moor - 2007)

Idée Estimateurs sans biais à variance minimale de l'état et de la commande

Implémentation

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}}$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_0$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1^{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}} \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B} \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}} \mathbf{B}^{\top} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$$

2. Estimation de la commande

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} = (\mathbf{D} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{D}^{\top})^{-1}$$

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k)$$

3. Estimation de l'état

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_k)$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}\top}$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} = -\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}}$$

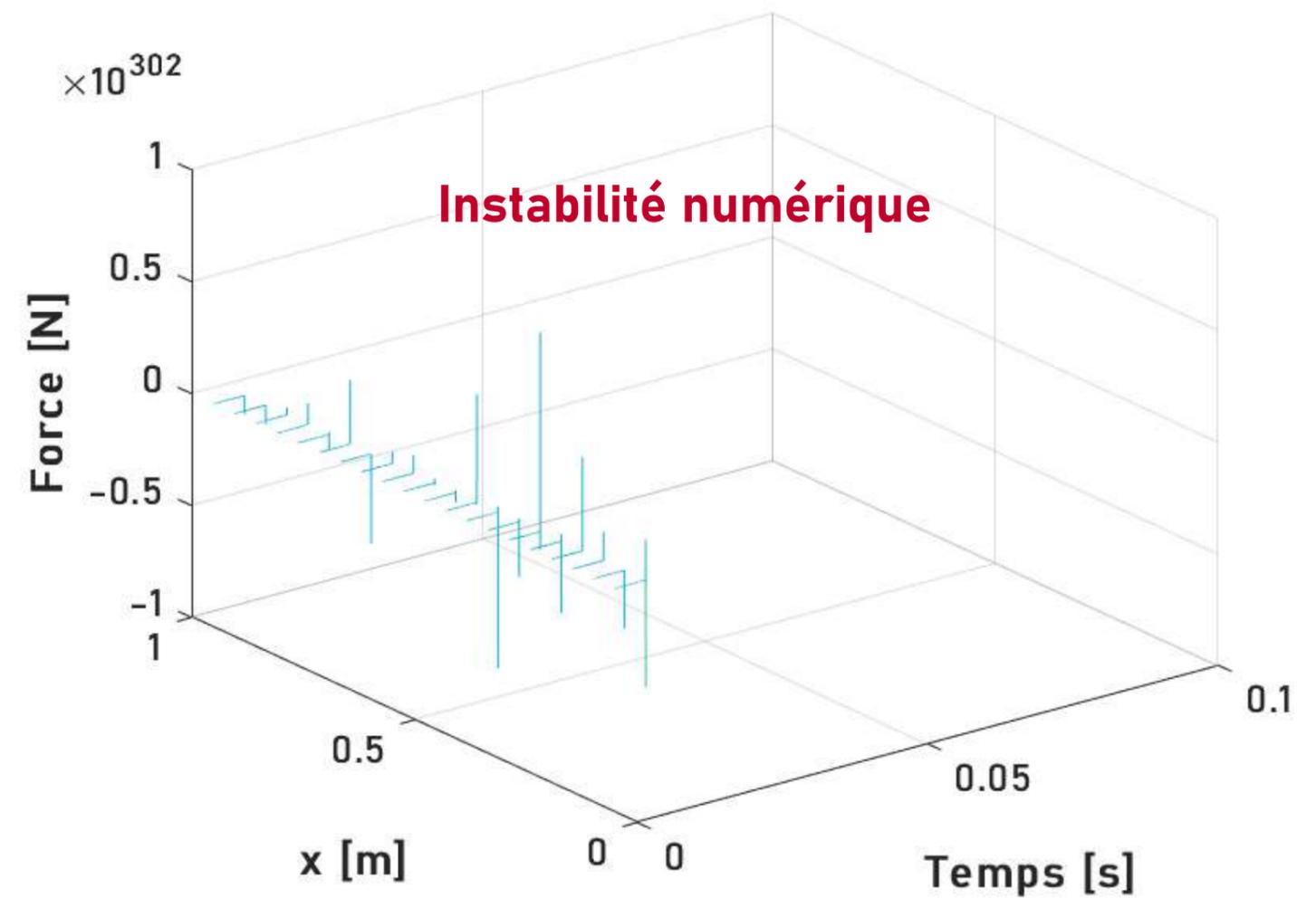
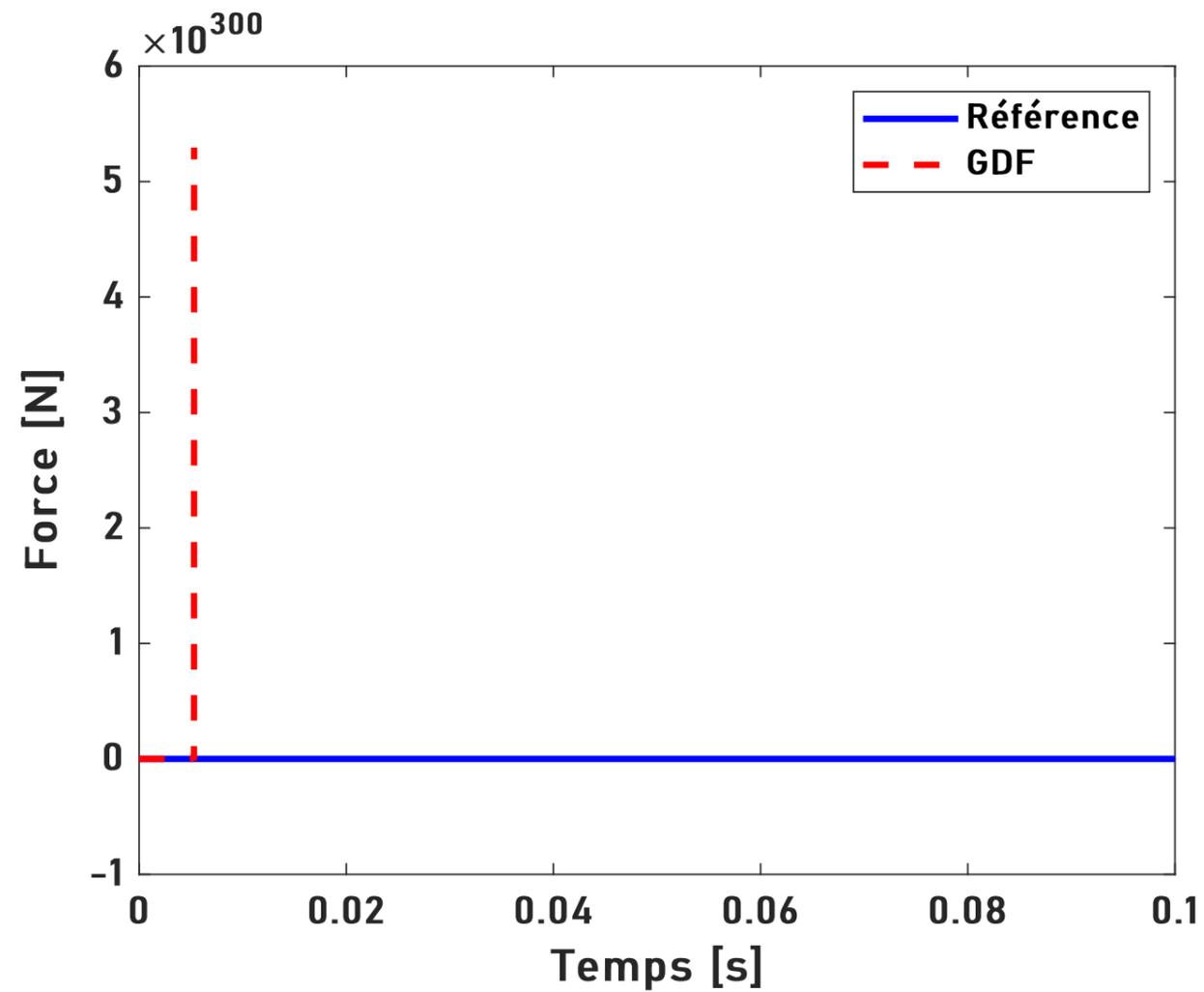
4. Prédiction de l'état

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}\top} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\top} \\ \mathbf{B}^{\top} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$$

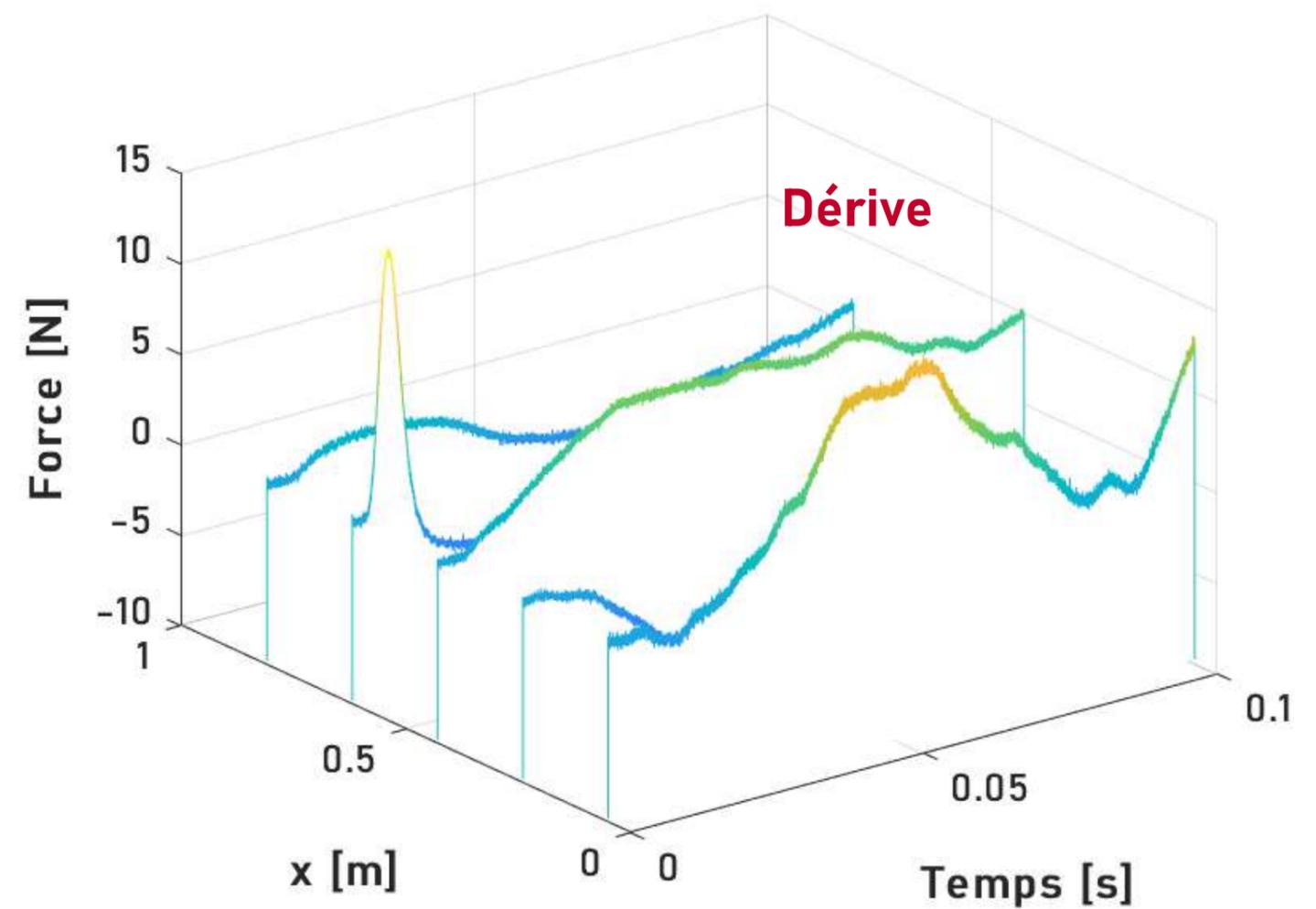
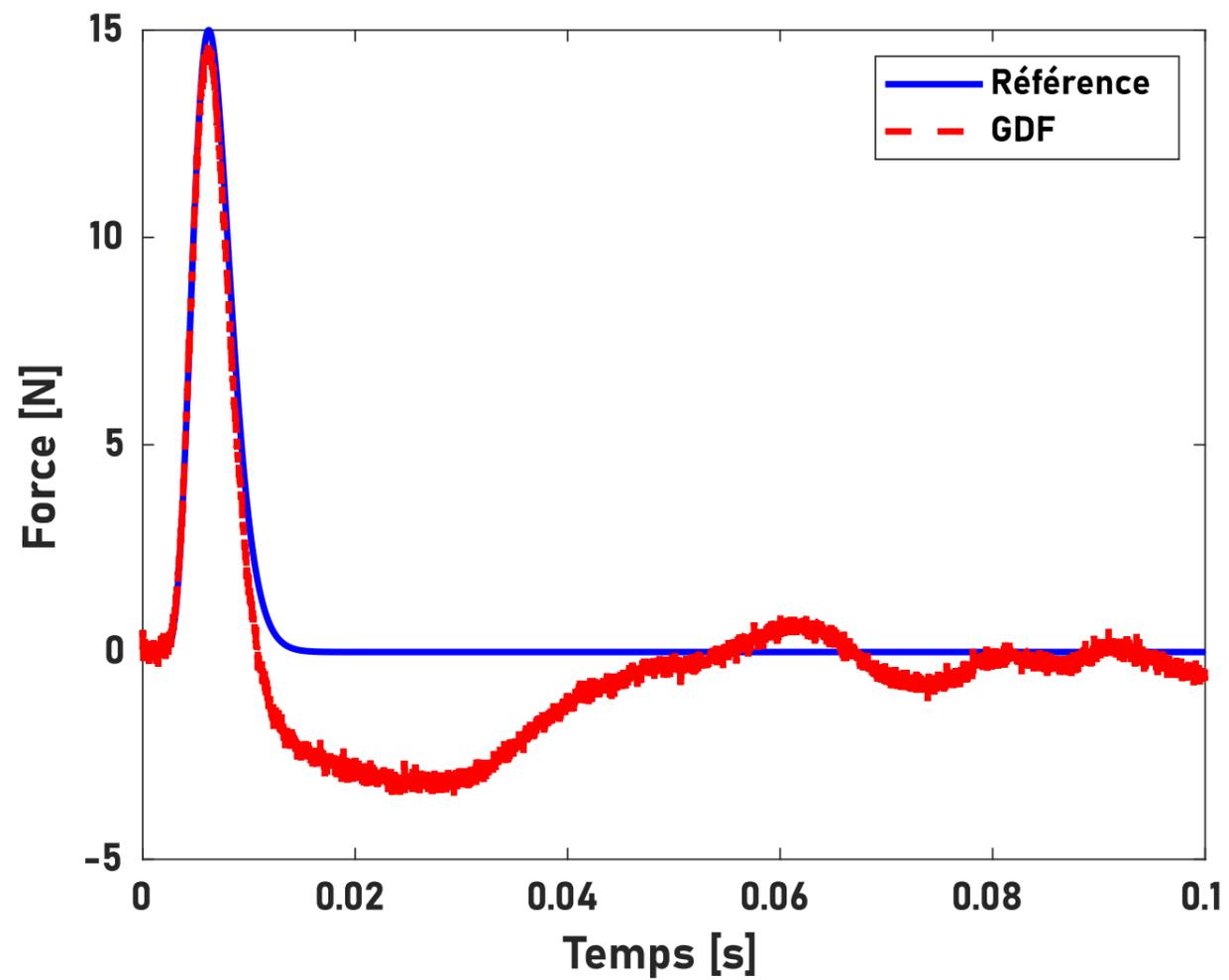
Principaux filtres Gillijns and De Moor Filter (Gillijns and De Moor - 2007)

Application Configuration 1 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^{\mathbf{x}} = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$



Principaux filtres Gillijns and De Moor Filter (Gillijns et De Moor - 2007)

Application Configuration 2 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$



Principaux filtres Dual Kalman Filter (Eftekhar Azam et al. - 2015)

Idée Ajout d'une équation fictive sur la commande (idem AKF) + 2 filtres de Kalman appliqués séquentiellement

Implémentation

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}}$

2. Prédiction de la commande

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_{k-1}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{k-1}^{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{u}}$$

3. Estimation de la commande

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} \left(\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R} \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}}$$

4. Prédiction de l'état

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$$

5. Estimation de l'état

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} \left(\mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} + \mathbf{R} \right)^{-1}$$

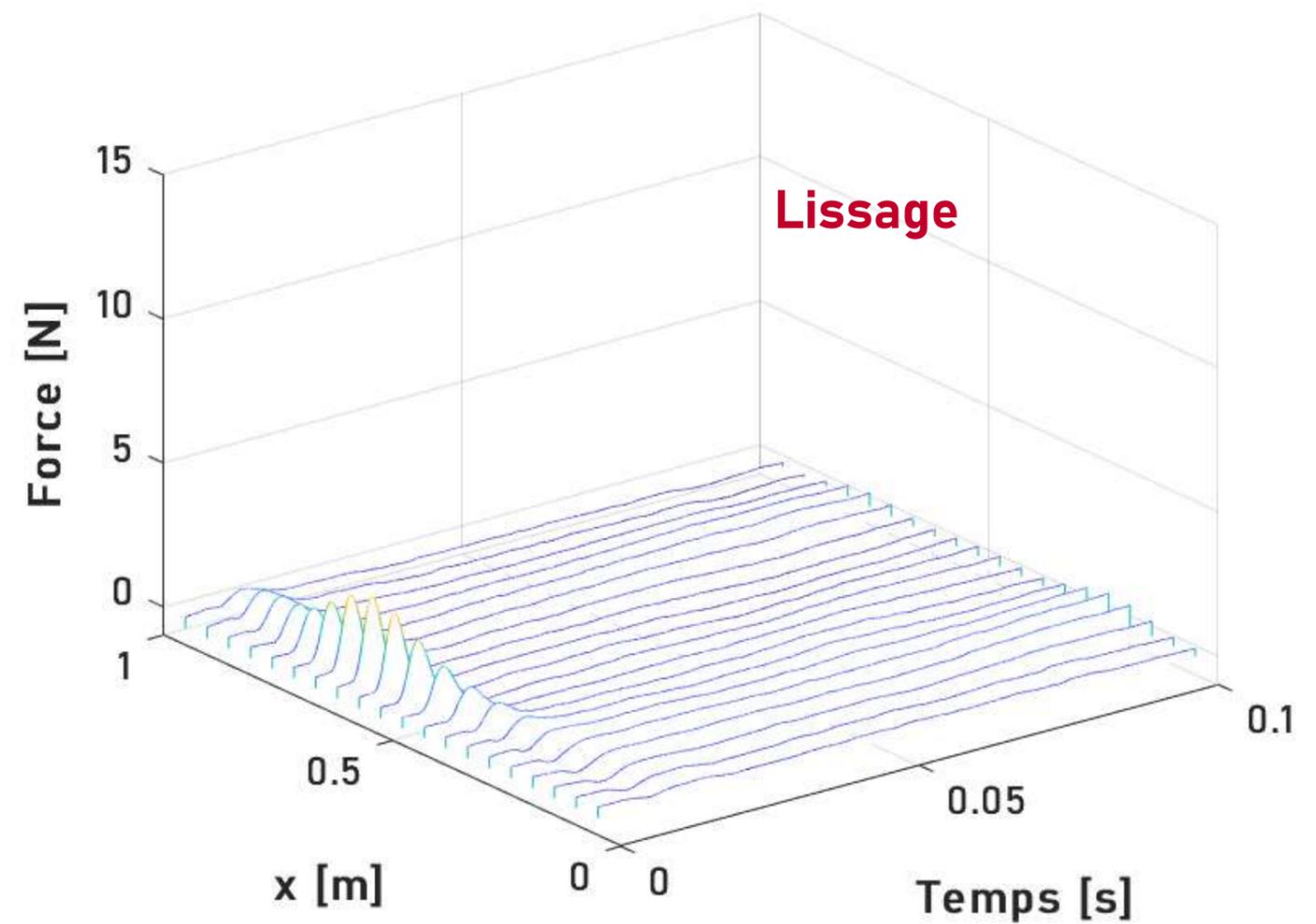
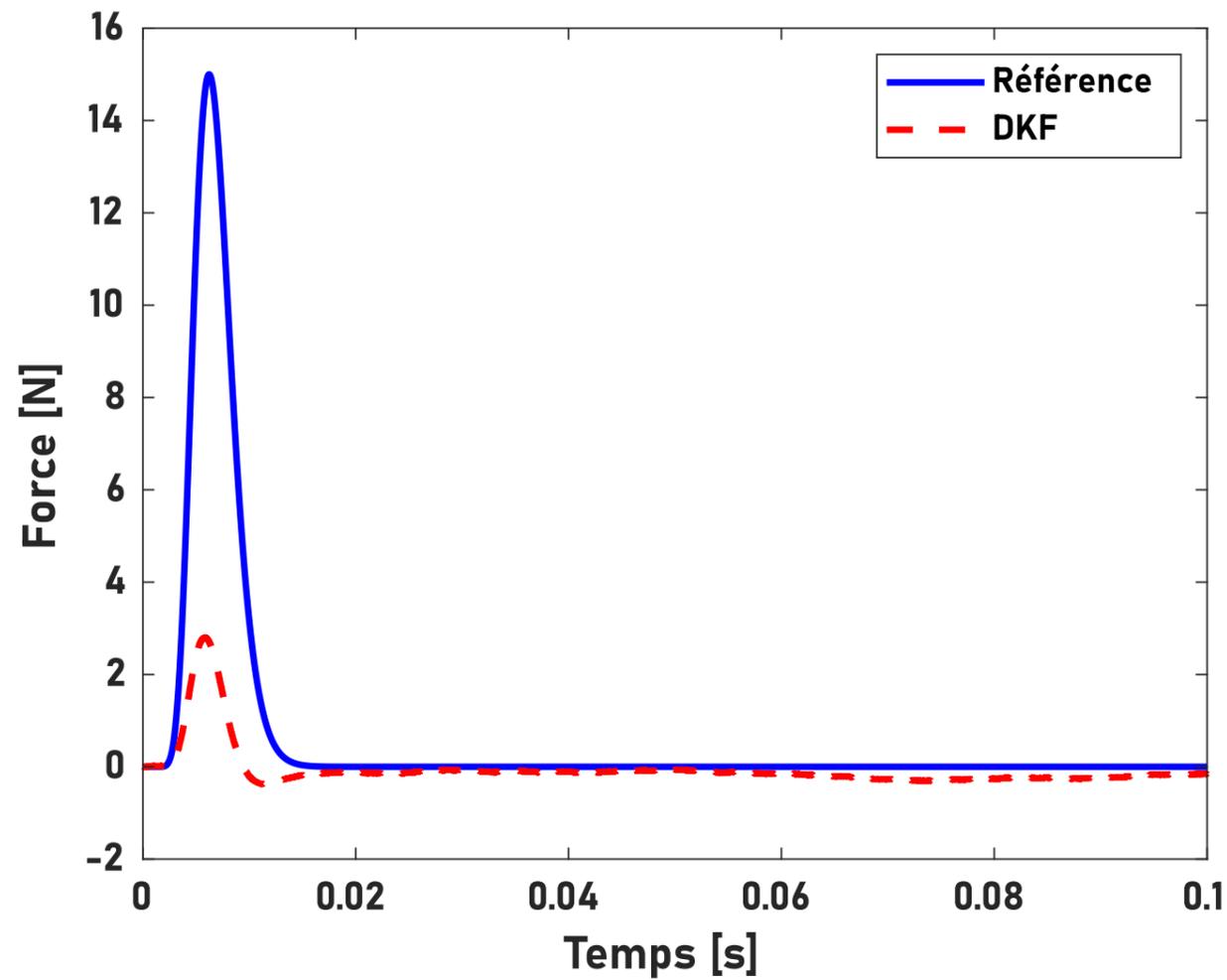
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_k)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}}$$

Remarque σ_u^2 est sélectionnée automatiquement à partir d'une méthode a posteriori "maison"

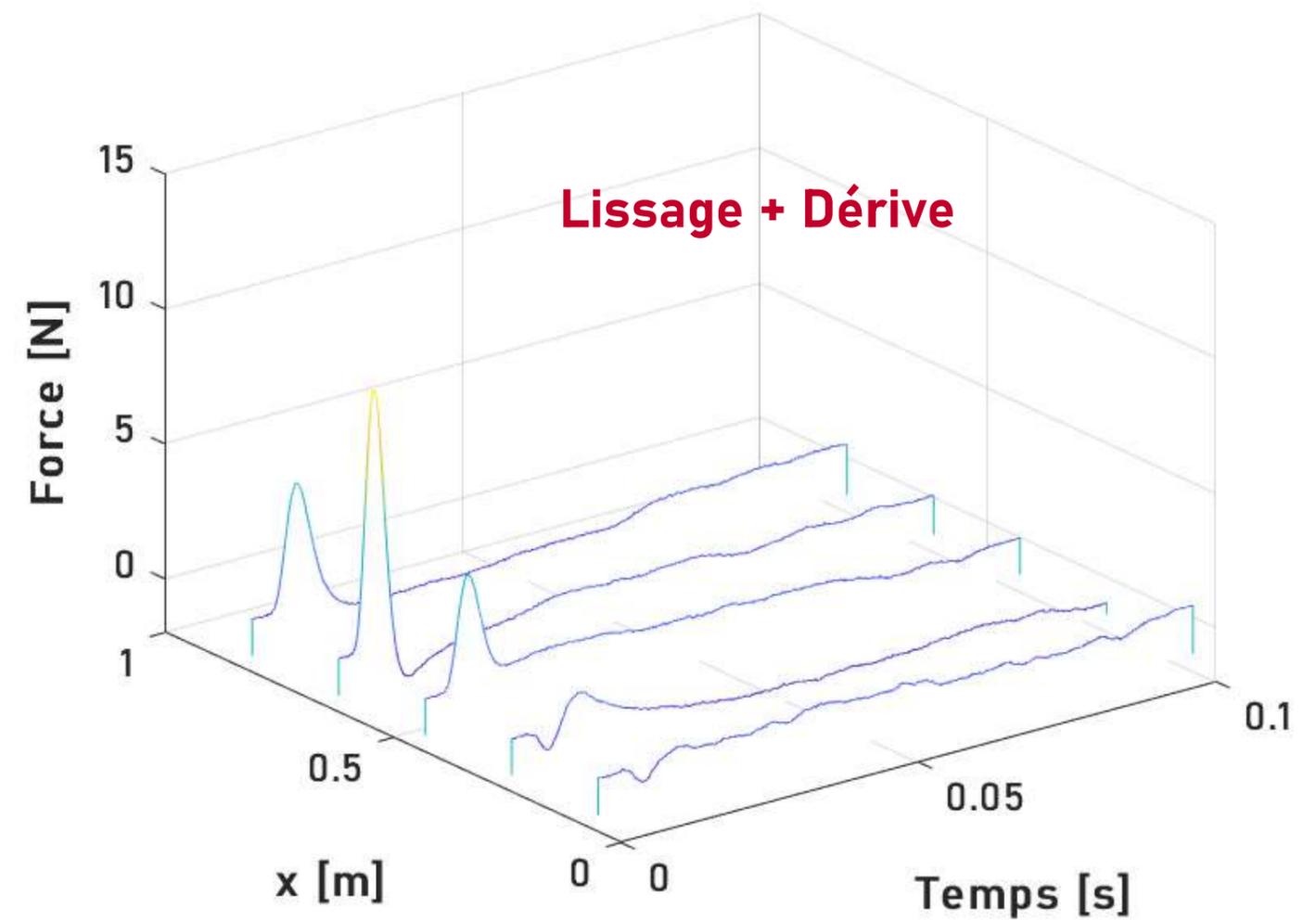
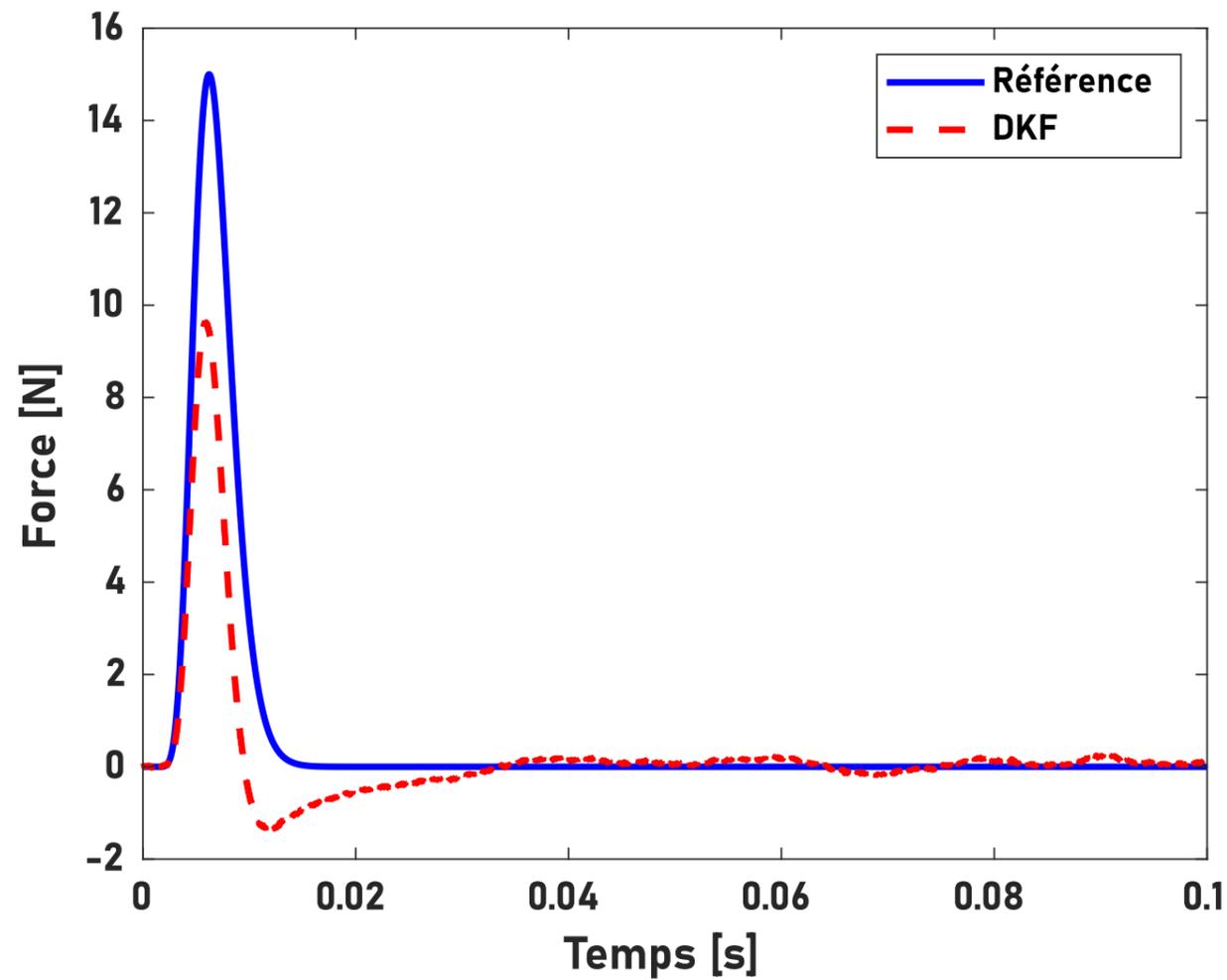
Principaux filtres Dual Kalman Filter (Eftekhar Azam et al. - 2015)

Application Configuration 1 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = \mathbf{P}_0^u = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{\sigma}_u^2 = 1.31 \times 10^{-5}$



Principaux filtres Dual Kalman Filter (Eftekhar Azam et al. - 2015)

Application Configuration 2 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = \mathbf{P}_0^u = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{\sigma}_u^2 = 6.71 \times 10^{-5}$



Principaux filtres Sequential Bayesian Filter (Sedehi et al. - 2019)

Idée Hypothèse lors de l'étape de prédiction de la commande - $\tilde{\mathbf{u}}_k \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{u}}_k | \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k-1}^u)$

Implémentation

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^x, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^u$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_0$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1^x = \mathbf{A} \mathbf{P}_0^x \mathbf{A}^\top + \mathbf{B} \mathbf{P}_0^u \mathbf{B}^\top + \mathbf{Q}_x$$

2. Estimation de la commande

$$\mathbf{K}_k^u = \mathbf{P}_{k-1}^u \mathbf{D}^\top (\mathbf{D} \mathbf{P}_{k-1}^u \mathbf{D}^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{K}_k^u (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k^*)$$

$$\mathbf{P}_k^u = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^u \mathbf{D}) \mathbf{P}_{k-1}^u + \mathbf{K}_k^u \mathbf{C} \mathbf{P}_k^x \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^{u\top}$$

3. Estimation de l'état

$$\mathbf{K}_k^x = \tilde{\mathbf{P}}_k^x \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^x \mathbf{C}^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^x (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_k)$$

$$\mathbf{P}_k^x = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^x \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}_k^x + \mathbf{K}_k^x \mathbf{D} \mathbf{P}_k^u \mathbf{D}^\top \mathbf{K}_k^{x\top}$$

$$\mathbf{P}_k^{xu} = -\mathbf{K}_k^x \mathbf{D} \mathbf{P}_k^u$$

4. Prédiction de l'état

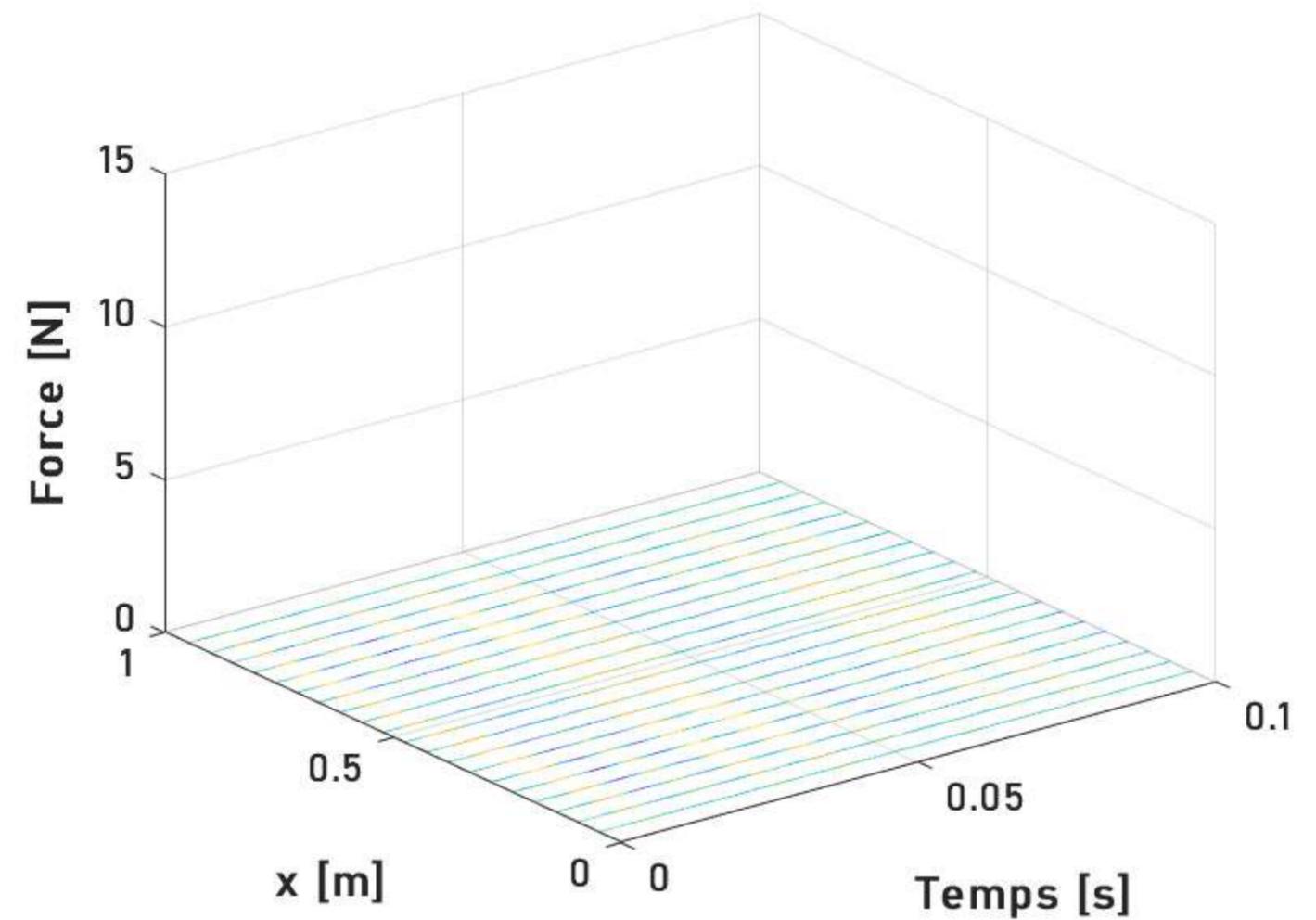
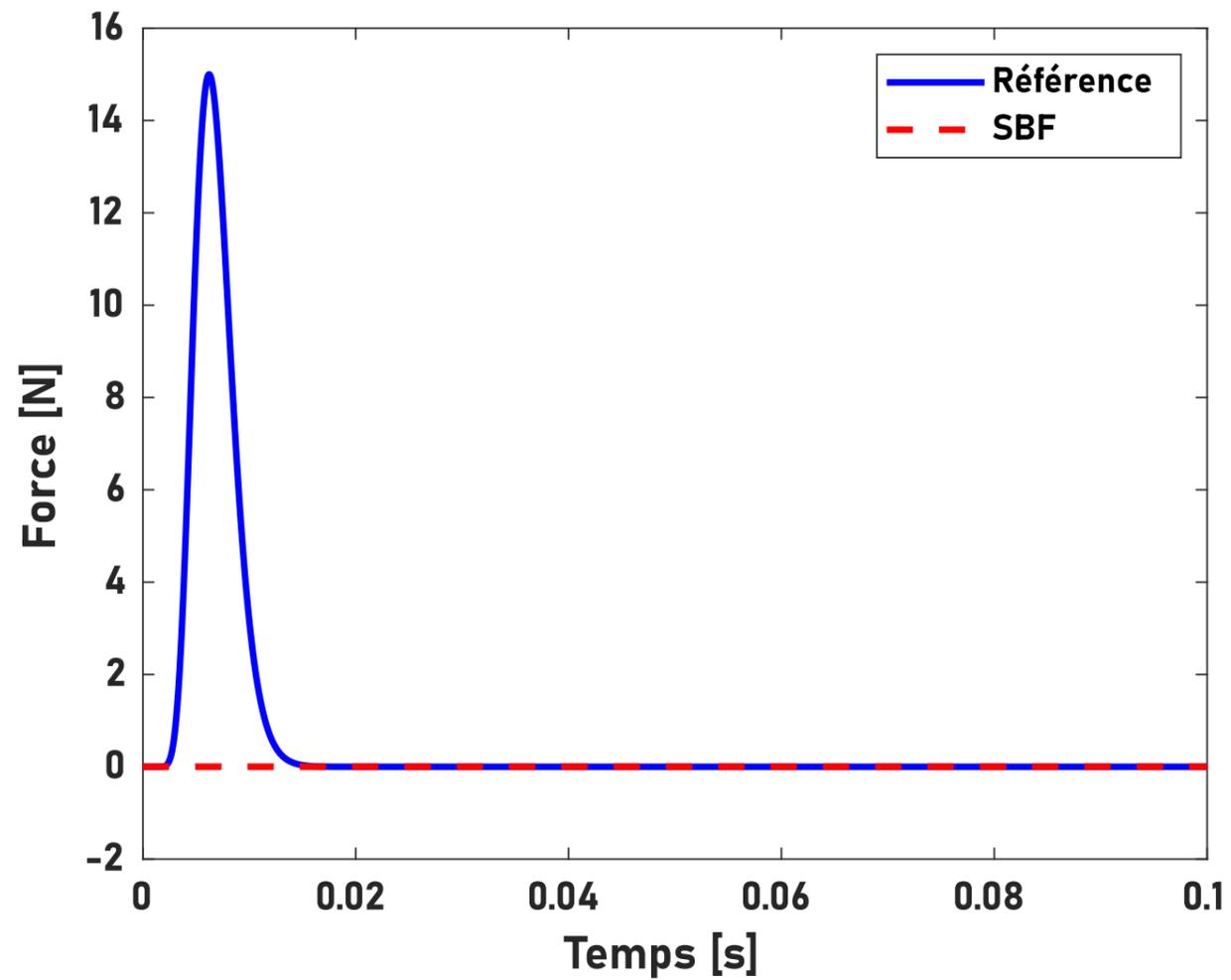
$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^x = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^x & \mathbf{P}_k^{xu} \\ \mathbf{P}_k^{xu\top} & \mathbf{P}_k^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_x$$

Remarque Dans l'article original, une mise à jour à chaque pas de temps de \mathbf{Q}_x et \mathbf{R} est effectuée

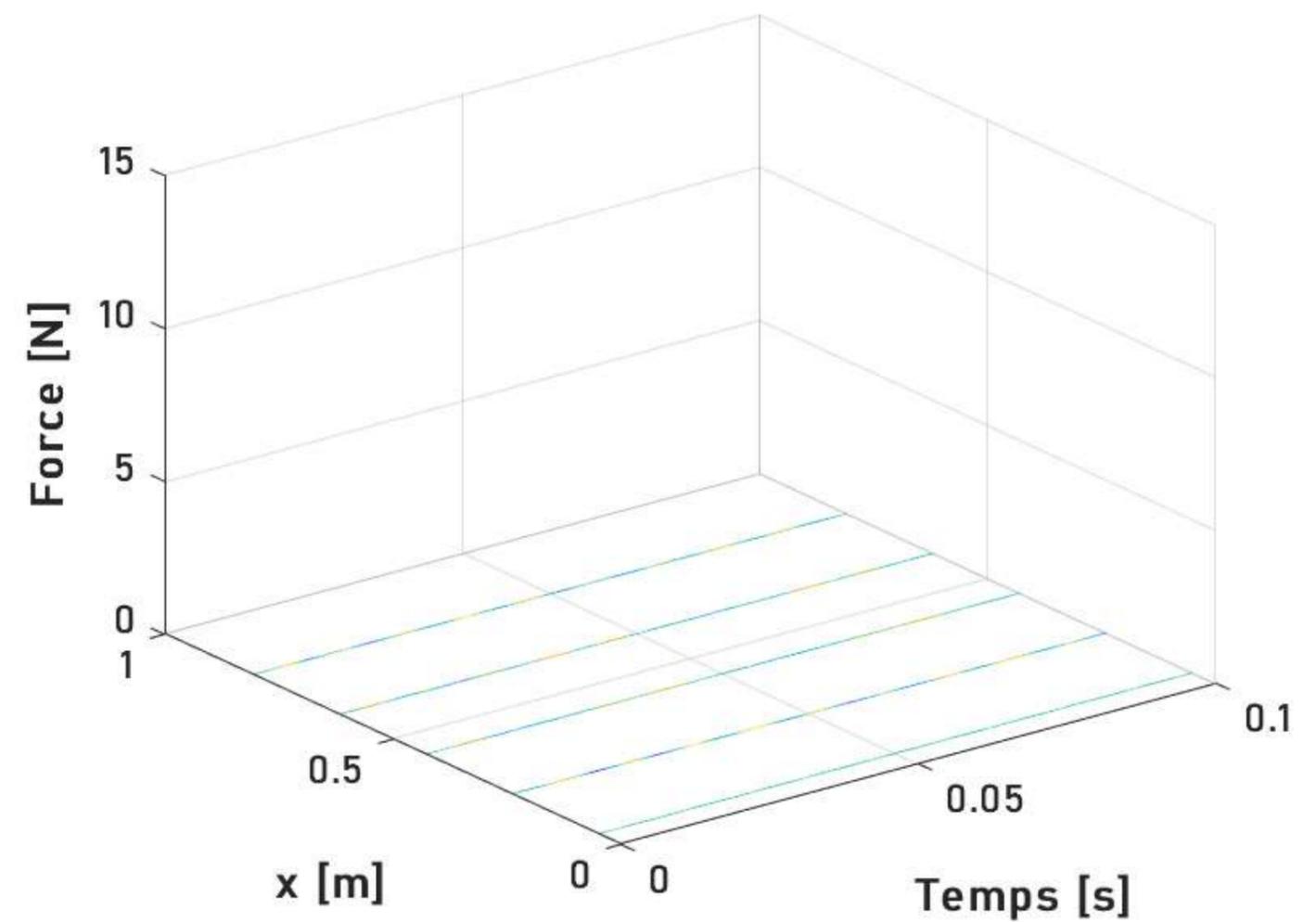
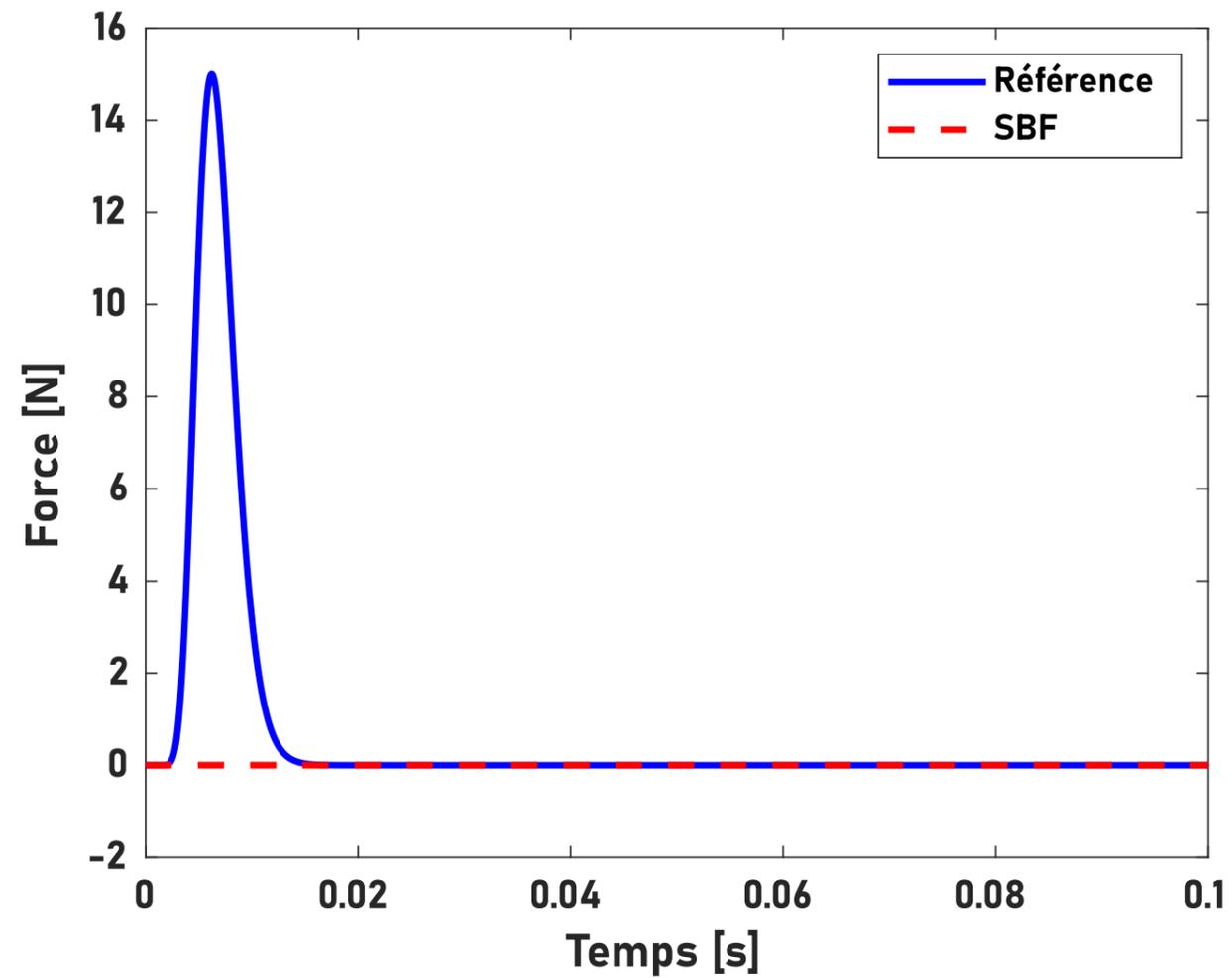
Principaux filtres Sequential Bayesian Filter (Sedehi et al. - 2019)

Application Configuration 1 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = \mathbf{P}_0^u = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$



Principaux filtres Sequential Bayesian Filter (Sedehi et al. - 2019)

Application Configuration 2 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}} = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$



Bilan

Les filtres "état de l'art" souffrent de deux problèmes principaux : **Lissage** et **dérive** de la commande

Comment pallier ces problèmes ?

En imposant la parcimonie spatiale de la commande !

Sommaire

1 Généralités

2 État de l'art

3 Filtre Bayésien parcimonieux

Préliminaires Filtres Bayésiens conjoints (AKF) - Filtre de Kalman

Formulation Bayésienne

0. Modèle

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^a &\sim p(\mathbf{x}_{k+1}^a | \mathbf{x}_k^a) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}^a | \mathbf{A}_a \mathbf{x}_k^a, \mathbf{Q}_a) \\ \mathbf{y}_k &\sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^a) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k | \mathbf{C}_a \mathbf{x}_k^a, \mathbf{R})\end{aligned}$$

1. Initialisation

$$\mathbf{x}_0^a \sim p(\mathbf{x}_0^a) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0^a | \hat{\mathbf{x}}_0^a, \mathbf{P}_0^a)$$

2. Prédiction de l'état

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^a \sim p(\mathbf{x}_k^a | \mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int_{\mathbf{x}_{k-1}^a} p(\mathbf{x}_k^a | \mathbf{x}_{k-1}^a) p(\mathbf{x}_{k-1}^a | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}^a \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^a | \tilde{\mathbf{x}}_k^a, \tilde{\mathbf{P}}_k^a)\end{aligned}$$

3. Estimation de l'état

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^a \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &\propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^a | \hat{\mathbf{x}}_k^a, \mathbf{P}_k^a)\end{aligned}$$

Implémentation

0. Modèle

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_k^a + \mathbf{w}_k^a \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_k^a + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0^a, \mathbf{P}_0^a$

2. Prédiction de l'état

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_k^a &= \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a \\ \tilde{\mathbf{P}}_k^a &= \mathbf{A}_a \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{A}_a^\top + \mathbf{Q}_a\end{aligned}$$

3. Estimation de l'état

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \tilde{\mathbf{P}}_k^a \mathbf{C}_a^\top (\mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{P}}_k^a \mathbf{C}_a^\top + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^a &= \tilde{\mathbf{x}}_k^a + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{x}}_k^a) \\ \mathbf{P}_k^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_a) \tilde{\mathbf{P}}_k^a\end{aligned}$$

Préliminaires Filtres Bayésiens séquentiels (GDF, DKF, SBF)

Formulation Bayésienne

0. Modèle

$$\mathbf{x}_{k+1} \sim p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \mathbf{Q}_x)$$

$$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k | \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k, \mathbf{R})$$

1. Initialisation

$$\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^x), \quad \mathbf{u}_0 \sim p(\mathbf{u}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_0 | \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^u)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \sim p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{y}_0) &= \int_{\mathbf{x}_0} \int_{\mathbf{u}_0} p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) p(\mathbf{x}_0) p(\mathbf{u}_0) d\mathbf{x}_0 d\mathbf{u}_0 \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_1 | \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_1^x) \end{aligned}$$

2. Prédiction de la commande

$$\mathbf{u}_k \sim p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k^u)$$

3. Estimation de la commande

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k \sim p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &\approx \int_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \hat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{P}_k^u) \end{aligned}$$

Implémentation

0. Modèle

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k$$

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^x, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^u$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_0$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1^x = \mathbf{A} \mathbf{P}_0^x \mathbf{A}^\top + \mathbf{B} \mathbf{P}_0^u \mathbf{B}^\top + \mathbf{Q}_x$$

2. Prédiction de la commande - $\tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k^u$

3. Estimation de la commande

$$\mathbf{K}_k^u = \tilde{\mathbf{P}}_k^u \mathbf{D}^\top (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^u \mathbf{D}^\top + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}_k^u (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

$$\mathbf{P}_k^u = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^u \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{P}}_k^u + \mathbf{K}_k^u \mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^x \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^{u\top}$$

Préliminaires Filtres Bayésiens séquentiels (GDF, DKF, SBF)

Formulation Bayésienne

4. Estimation de l'état

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) &= \int_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_{1:k}) p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{u}_k \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} = \int_{\mathbf{x}_k} \int_{\mathbf{u}_k} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k)^\top p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{u}_k$$

5. Prédiction de l'état

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} \sim p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_{1:k}) &= \int_{\mathbf{x}_k} \int_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{u}_k \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1} | \tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Implémentation

4. Estimation de l'état

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^\top + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_k) \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^\top \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}\top} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} &= -\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

5. Prédiction de l'état

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k \\ \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}\top} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_x \end{aligned}$$

Préliminaires Filtres Bayésiens séquentiels (GDF, DKF, SBF)

GDF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \propto 1$$

DKF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \hat{\mathbf{u}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}^{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}_{\mathbf{u}})$$

- + Hyp. estimation de \mathbf{u}_k - $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \delta(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$
- + Hyp. prédiction/estimation de \mathbf{x}_k - $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \delta(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k)$

SBF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k-1}^{\mathbf{u}})$$

- + Hyp. pour l'estimation de \mathbf{u}_k - $\tilde{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$

Préliminaires Filtres Bayésiens séquentiels (GDF, DKF, SBF)

GDF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \propto 1$$

DKF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \hat{\mathbf{u}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}^u + \mathbf{Q}_u)$$

- + Hyp. estimation de \mathbf{u}_k - $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \delta(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$
- + Hyp. prédiction/estimation de \mathbf{x}_k - $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \delta(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k)$

SBF

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \mathbf{P}_{k-1}^u)$$

- + Hyp. pour l'estimation de \mathbf{u}_k - $\tilde{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$

Comment imposer la parcimonie spatiale de la commande ?

En choisissant judicieusement $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$

Sparse adaptive Bayesian Filter **Idée générale**

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k) = \left(\frac{q_k^{1-\frac{1}{q_k}}}{2 \Gamma(\frac{1}{q_k})} \right) \tau_k^{\frac{n_u}{q_k}} \exp \left(-\frac{\tau_k}{q_k} \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k} \right)$$

- q_k : Paramètre de forme strictement positif
 - $q_k \geq 2$ - Champ d'excitation réparti
 - $q_k \leq 1$ - Champ d'excitation localisé
- τ_k : Paramètre d'échelle strictement positif
- $\Gamma(x)$: Fonction gamma
- n_u : Nombre de points de reconstruction

Sparse adaptive Bayesian Filter **Idée générale**

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k) = \left(\frac{q_k^{1-\frac{1}{q_k}}}{2 \Gamma(\frac{1}{q_k})} \right) \tau_k^{\frac{n_u}{q_k}} \exp \left(-\frac{\tau_k}{q_k} \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k} \right)$$

Pour s'intégrer dans le cadre Bayésien défini précédemment, on utilise l'approximation Gaussienne suivante :

$$\mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k) \propto \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \mathbf{W}_k^{-1} / \tau_k) \text{ avec } \mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k(\mathbf{u}_k, q_k)$$

Les seules modifications à apporter à l'agorithme général sont donc :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \mathbf{0} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}_k^u = \mathbf{W}_k^{-1} / \tau_k$$

Comment trouver les valeurs optimisées de \mathbf{W}_k et τ_k ?

i.e. trouver les valeurs optimisées de \mathbf{u}_k , q_k et τ_k

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \left(\mathbf{D}^{\top} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} + [\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}}]^{-1} \right)^{-1} \mathbf{D}^{\top} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}_k} \frac{1}{2} \|\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_k - \tilde{\mathbf{u}}_k\|_{\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}}}^2$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k)$$

avec $p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{i}_k | \mathbf{D} \mathbf{u}_k, \mathbf{R})$ et $p(\mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k | \tilde{\mathbf{u}}_k, \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}})$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k)$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k)$$

Extension du raisonnement

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\tau}_k, \hat{q}_k) = \underset{\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k | \mathbf{i}_k)$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k)$$

Extension du raisonnement

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\tau}_k, \hat{q}_k) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k} p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k) p(q_k)$$

avec $p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{i}_k | \mathbf{D} \mathbf{u}_k, \mathbf{R})$ et $p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) = \mathcal{N}_g(\mathbf{u}_k | \mathbf{0}, \tau_k, q_k)$

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k)$$

Extension du raisonnement

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\tau}_k, \hat{q}_k) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k} p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k) p(q_k)$$

Choix de $p(\tau_k)$ et $p(q_k)$?

Sparse adaptive Bayesian Filter Intuition mathématique

Rappel

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} (\mathbf{D} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}_k)$$

où $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$ est l'innovation

Un peu de maths On rembobine le film

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{u}_k | \mathbf{i}_k)$$

Extension du raisonnement

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\tau}_k, \hat{q}_k) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k, \tau_k, q_k} p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k) p(q_k)$$

Par commodité (lois conjuguées), on choisit :

$$p(\tau_k) = \mathcal{G}(\tau_k | \alpha_t, \beta_t) \text{ et } p(q_k) = \mathcal{IG}_T(q_k | \alpha_q, \beta_q, l_b, u_b)$$

avec $\alpha_t = \alpha_q = 1$, $\beta_t = \beta_q = 10^{-18}$, $l_b = 0.01$ et $u_b = 2$

Sparse adaptive Bayesian Filter Procédure de résolution

Connaissant l'ensemble des distributions de probabilité conditionnelles associées aux paramètres \mathbf{u}_k , τ_k et q_k , la solution du problème d'optimisation peut être trouvée en résolvant itérativement

$$\hat{\tau}_k = \operatorname{argmax}_{\tau_k} p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(\tau_k)$$

$$\hat{q}_k = \operatorname{argmax}_{q_k} p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k) p(q_k)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \operatorname{argmax}_{\mathbf{u}_k} p(\mathbf{i}_k | \mathbf{u}_k) p(\mathbf{u}_k | \tau_k, q_k)$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Procédure de résolution

Connaissant l'ensemble des distributions de probabilité conditionnelles associées aux paramètres \mathbf{u}_k , τ_k et q_k , la solution du problème d'optimisation peut être trouvée en résolvant itérativement

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_k &= \underset{\tau_k}{\operatorname{argmin}} \tau_k (\beta_t q_k + \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k}) - (N_u + q_k (\alpha_t - 1)) \log \tau_k \\ \hat{q}_k &= \underset{q_k}{\operatorname{argmin}} f(q_k | \mathbf{u}_k, \tau_k) \text{ pour } q_k \in [l_b, u_b] \\ \hat{\mathbf{u}}_k &= \underset{\mathbf{u}_k}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{i}_k - \mathbf{D} \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2 + \frac{\tau_k}{q_k} \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k}\end{aligned}$$

avec $f(q_k | \mathbf{u}_k, \tau_k) = N_u \log \Gamma\left(\frac{1}{q_k}\right) - N_u \frac{\log \tau_k + \tau_k \|\mathbf{u}_k\|_{q_k}^{q_k} + \beta_q}{q_k} - \left[N_u \left(1 - \frac{1}{q_k}\right) - \alpha_q - 1 \right] \log q_k$

À convergence Valeurs optimisées de $\hat{\mathbf{u}}_k$, $\hat{\tau}_k$ et \hat{q}_k

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} &= (\hat{\tau}_k \mathbf{W}_k)^{-1} \text{ avec } w_{ii,k} = |\hat{u}_{i,k}|^{\hat{q}_k - 2} \\ \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} &= \left(\mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D} + [\tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}}]^{-1} \right)^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{R}^{-1}\end{aligned}$$

Sparse adaptive Bayesian Filter Bilan

Implémentation

1. Initialisation - $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}_0, \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}}, \hat{q}_0$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_0$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1^{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{P}_0^{\mathbf{x}} \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B} \mathbf{P}_0^{\mathbf{u}} \mathbf{B}^{\top} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$$

2. Estimation de la commande

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k$$

$$(\hat{\mathbf{u}}_k, \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}}, \hat{q}_k) = \text{Optim}(\mathbf{D}, \mathbf{i}_k, \mathbf{R}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1}, \hat{q}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{C} \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} \mathbf{K}_k^{\mathbf{u}\top}$$

3. Estimation de l'état

$$\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}^{\top} + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_k)$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}_k^{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{D}^{\top} \mathbf{K}_k^{\mathbf{x}\top}$$

$$\mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} = -\mathbf{K}_k^{\mathbf{x}} \mathbf{D} \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}}$$

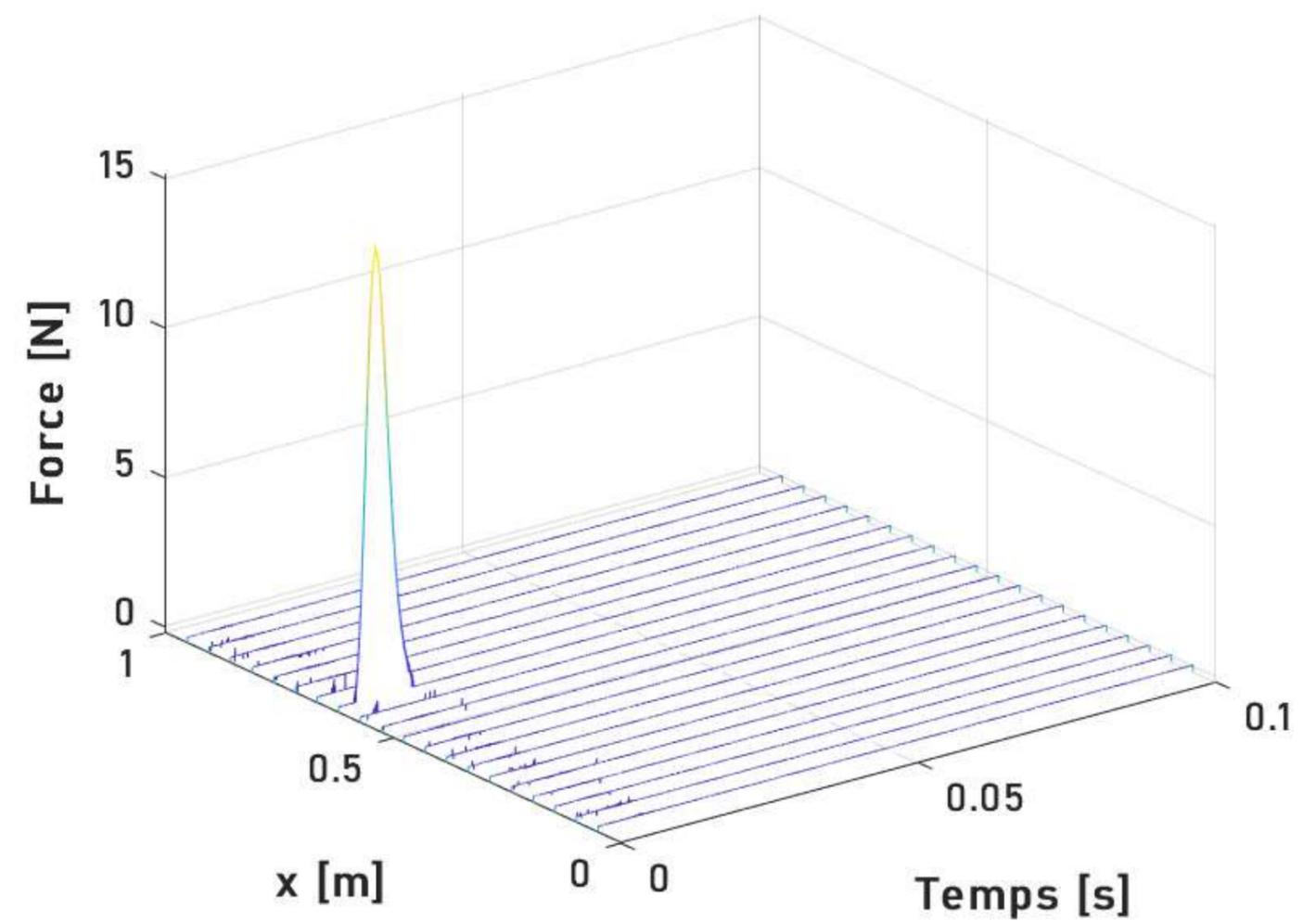
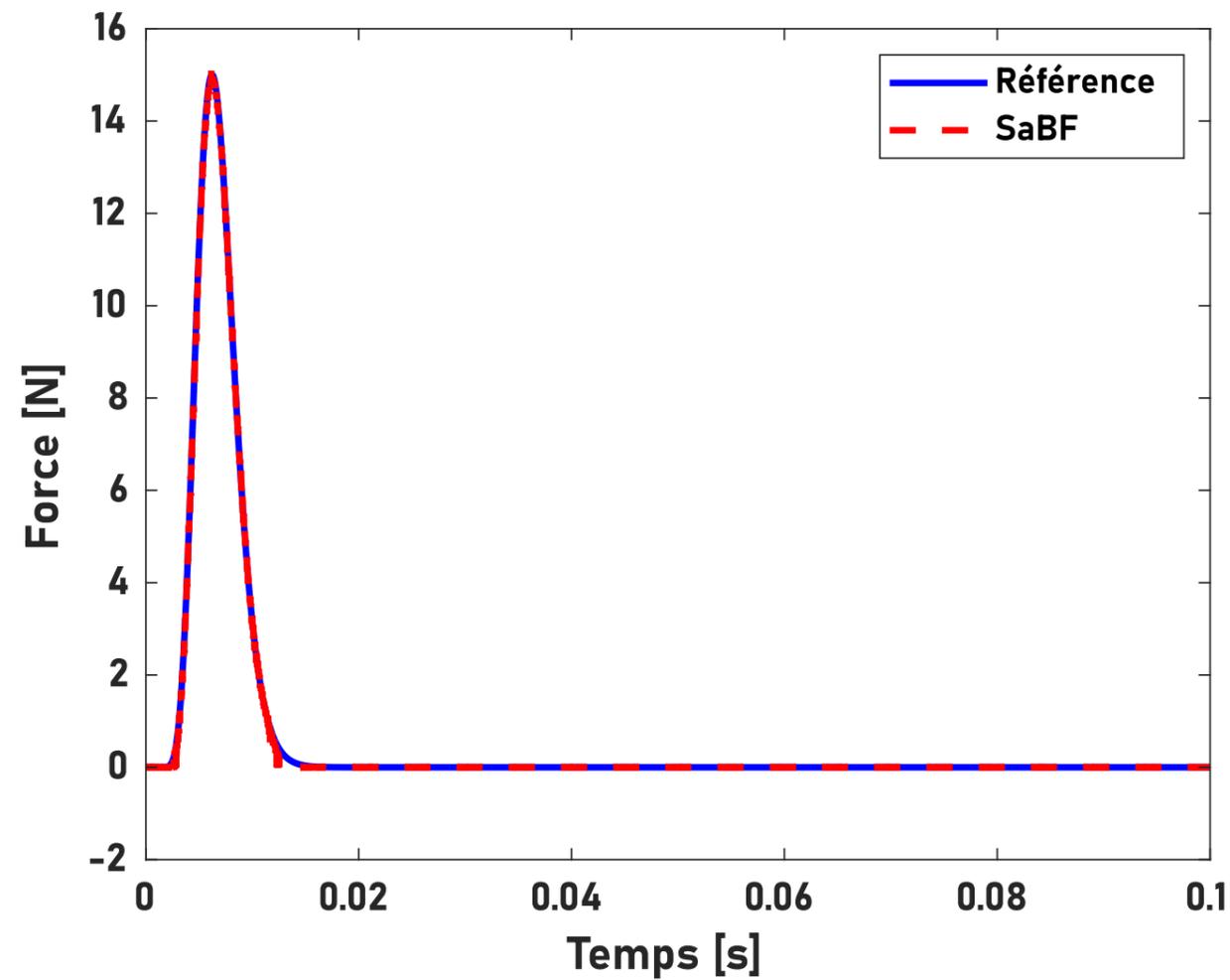
4. Prédiction de l'état

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^{\mathbf{x}} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}} \\ \mathbf{P}_k^{\mathbf{xu}\top} & \mathbf{P}_k^{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\top} \\ \mathbf{B}^{\top} \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$$

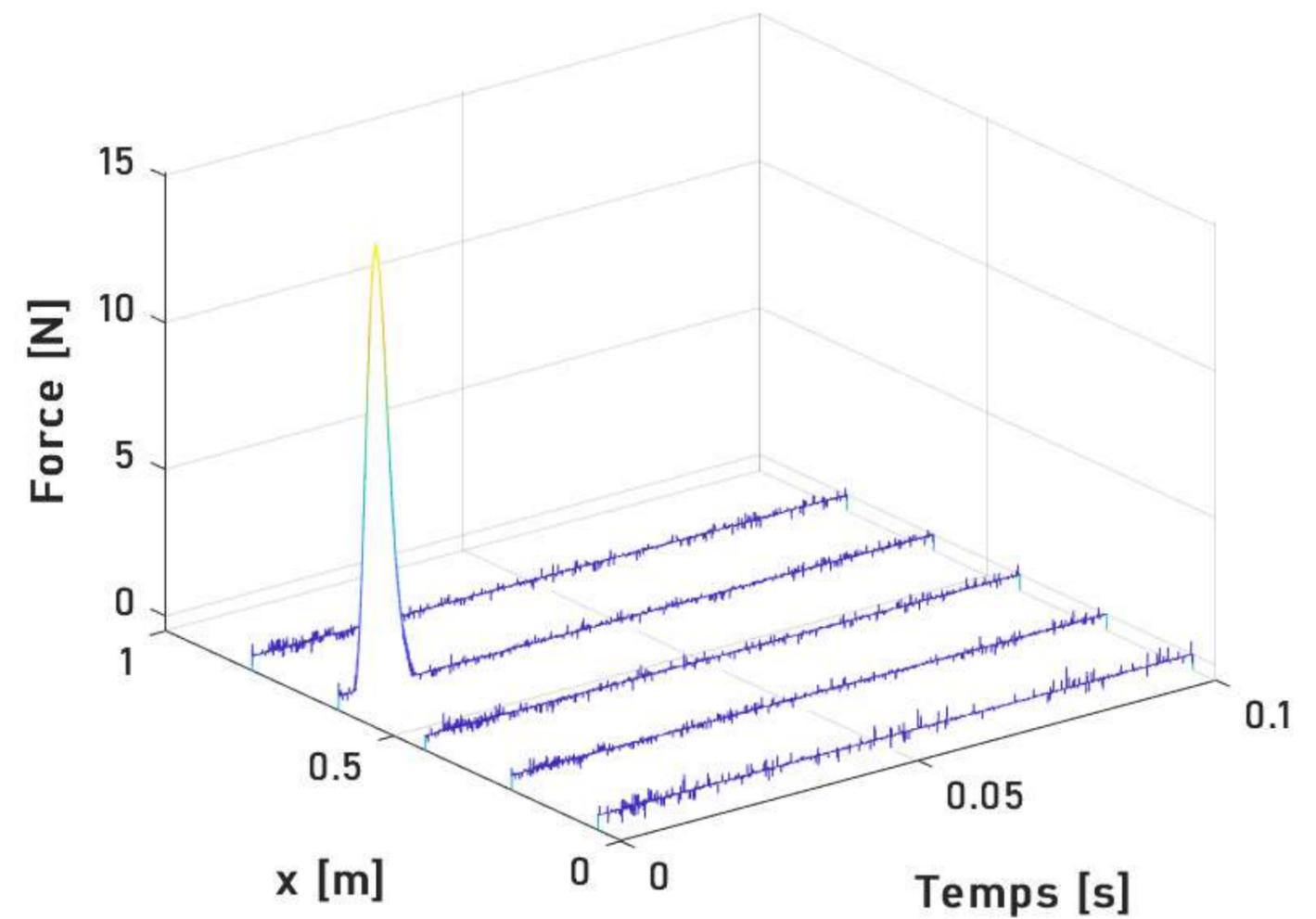
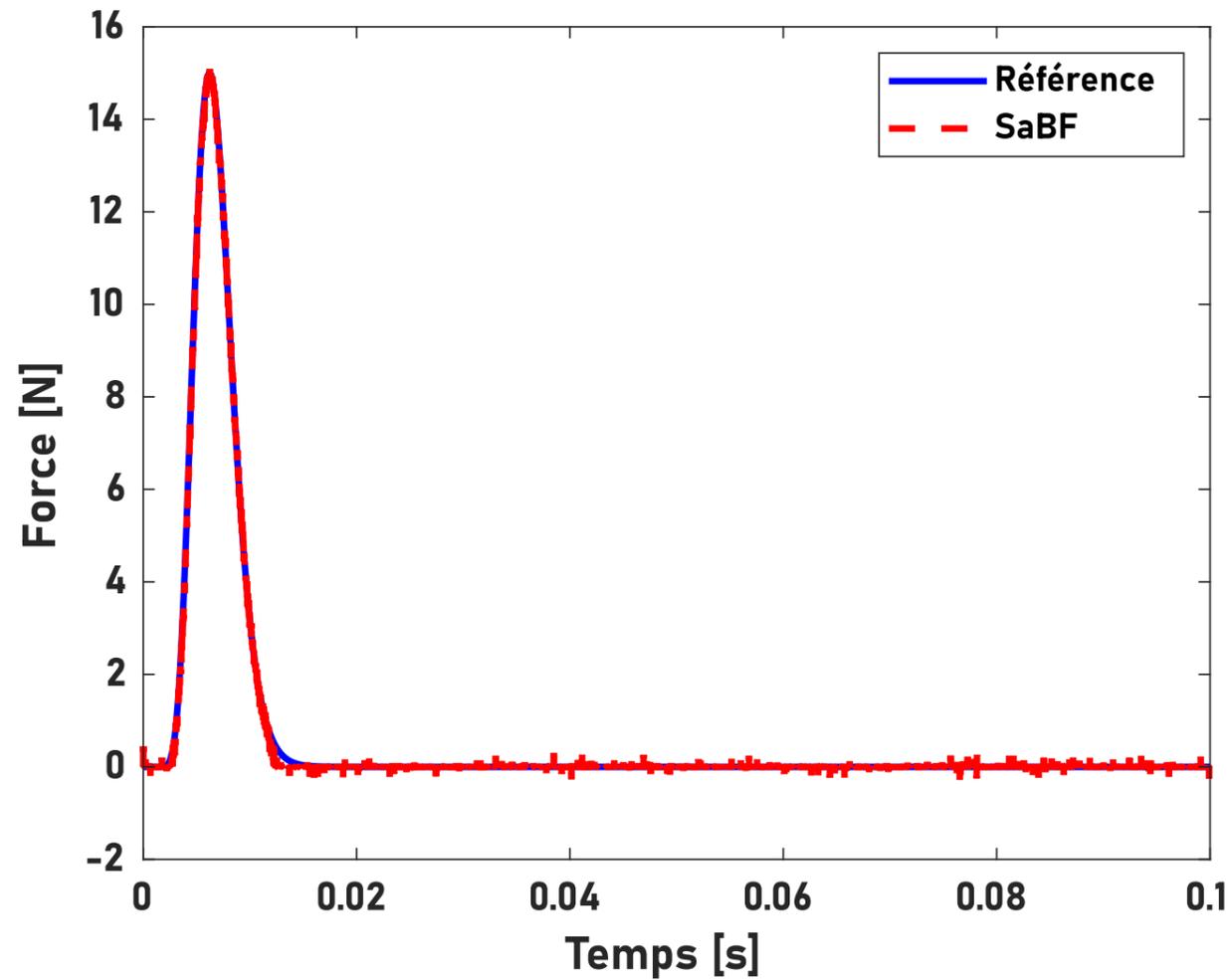
Sparse adaptive Bayesian Filter Résultats

Application Configuration 1 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = \mathbf{P}_0^u = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{q}_0 = 2$



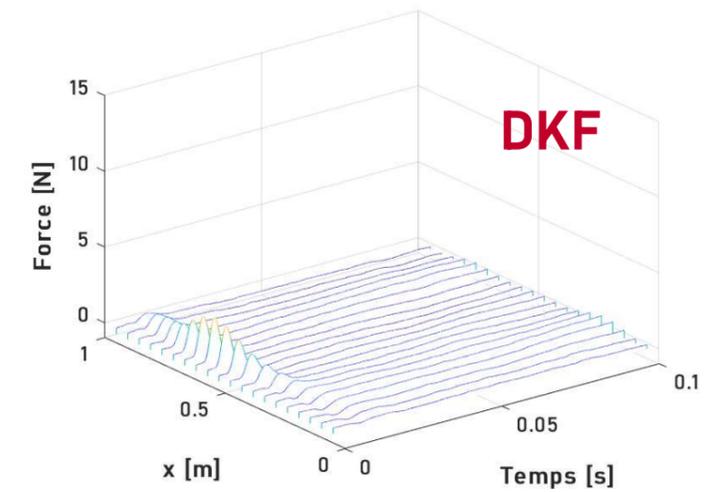
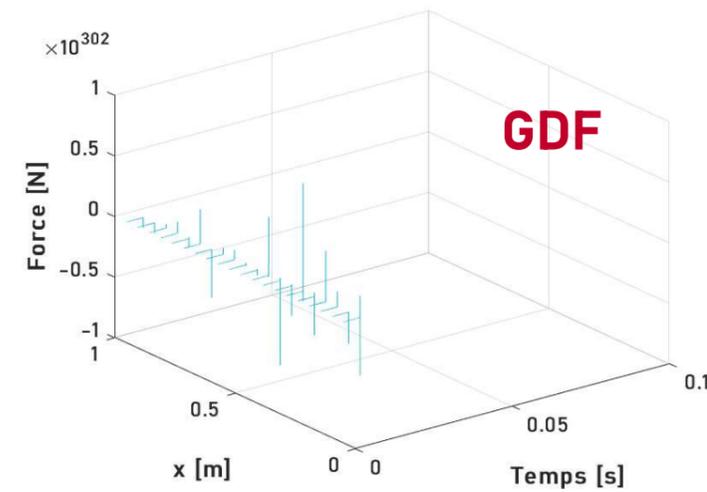
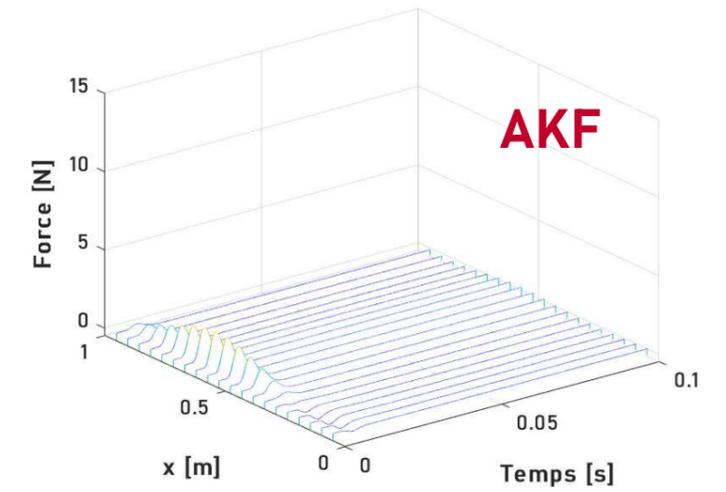
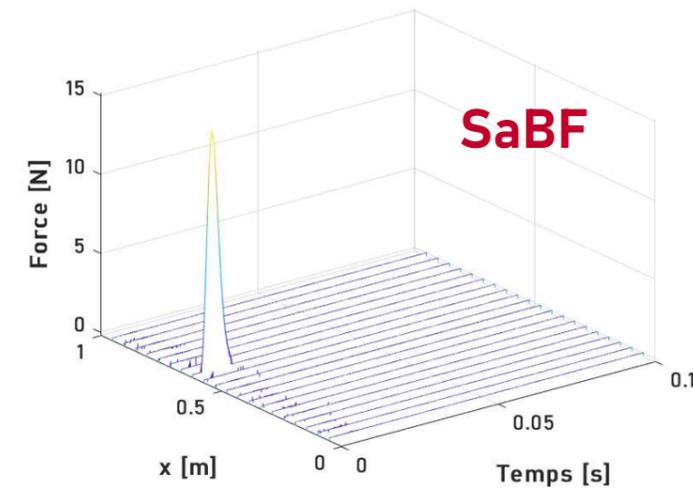
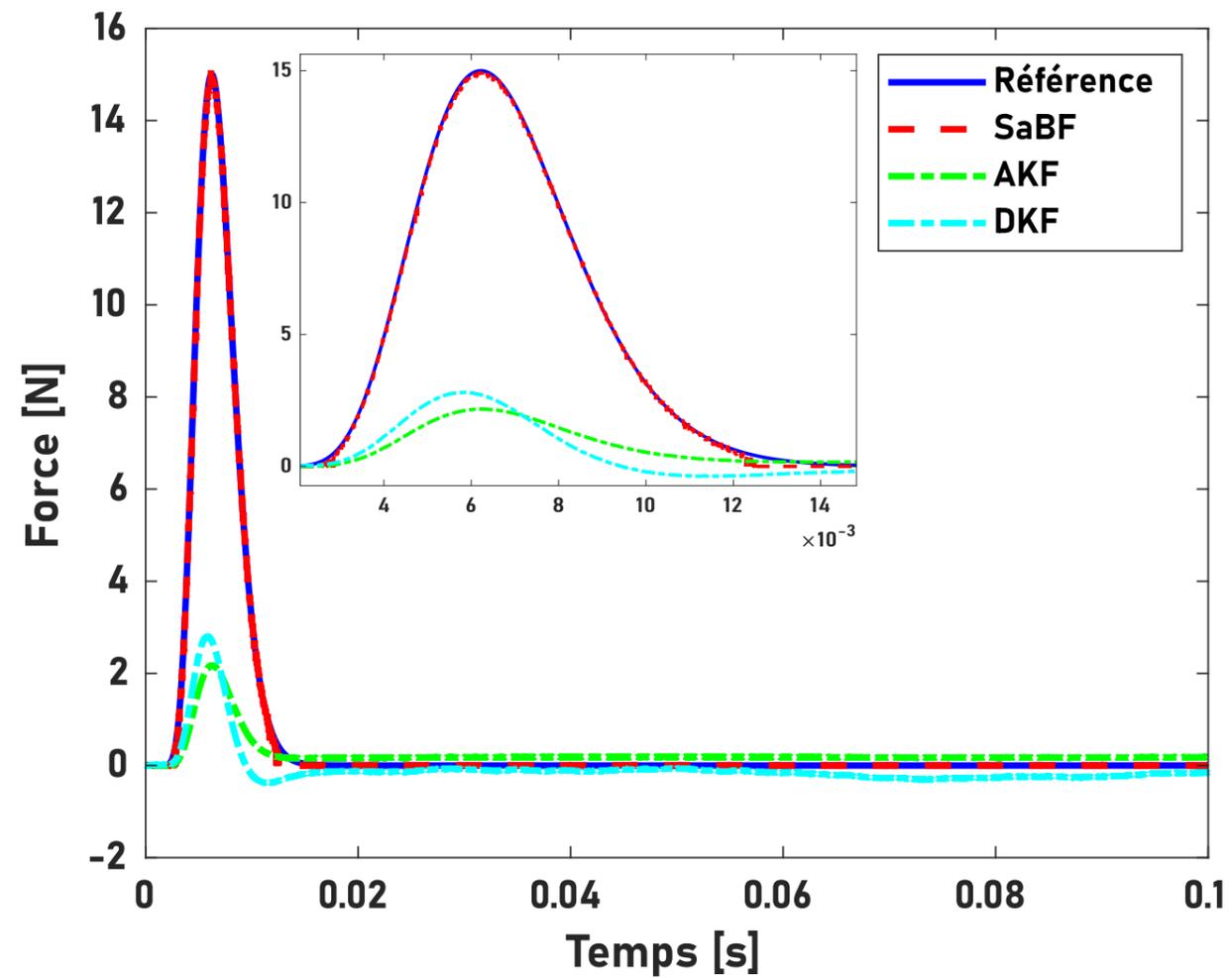
Sparse adaptive Bayesian Filter Résultats

Application Configuration 2 - $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^x = \mathbf{P}_0^u = 10^{-20} \mathbf{I}$, $\sigma_x^2 = 10^{-20}$, $\sigma_y^2 = 0.12$, $\hat{q}_0 = 2$



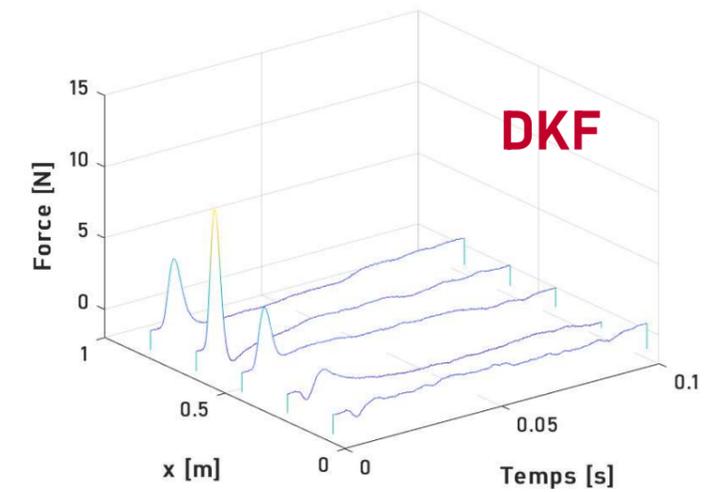
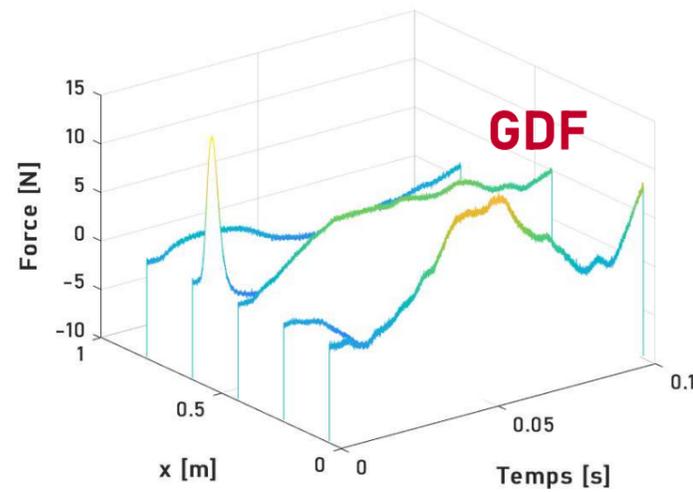
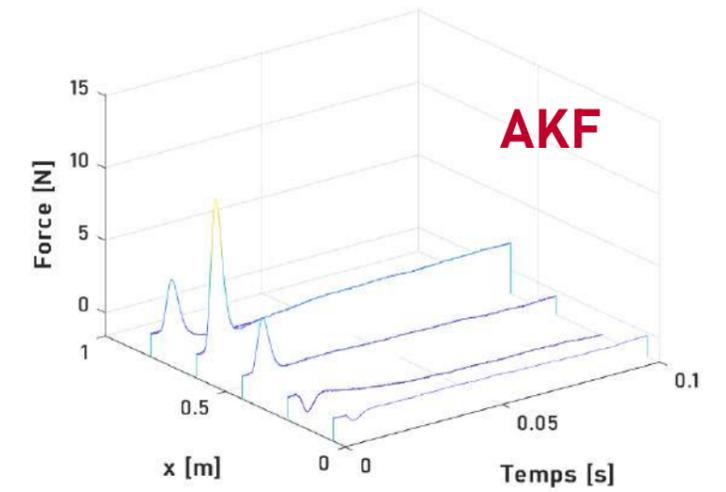
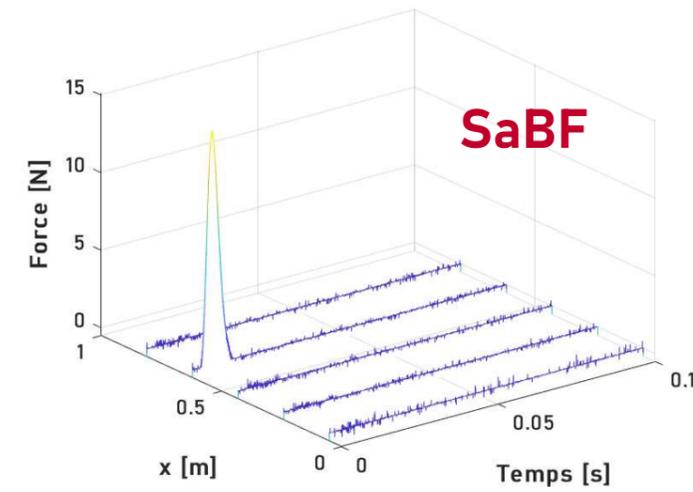
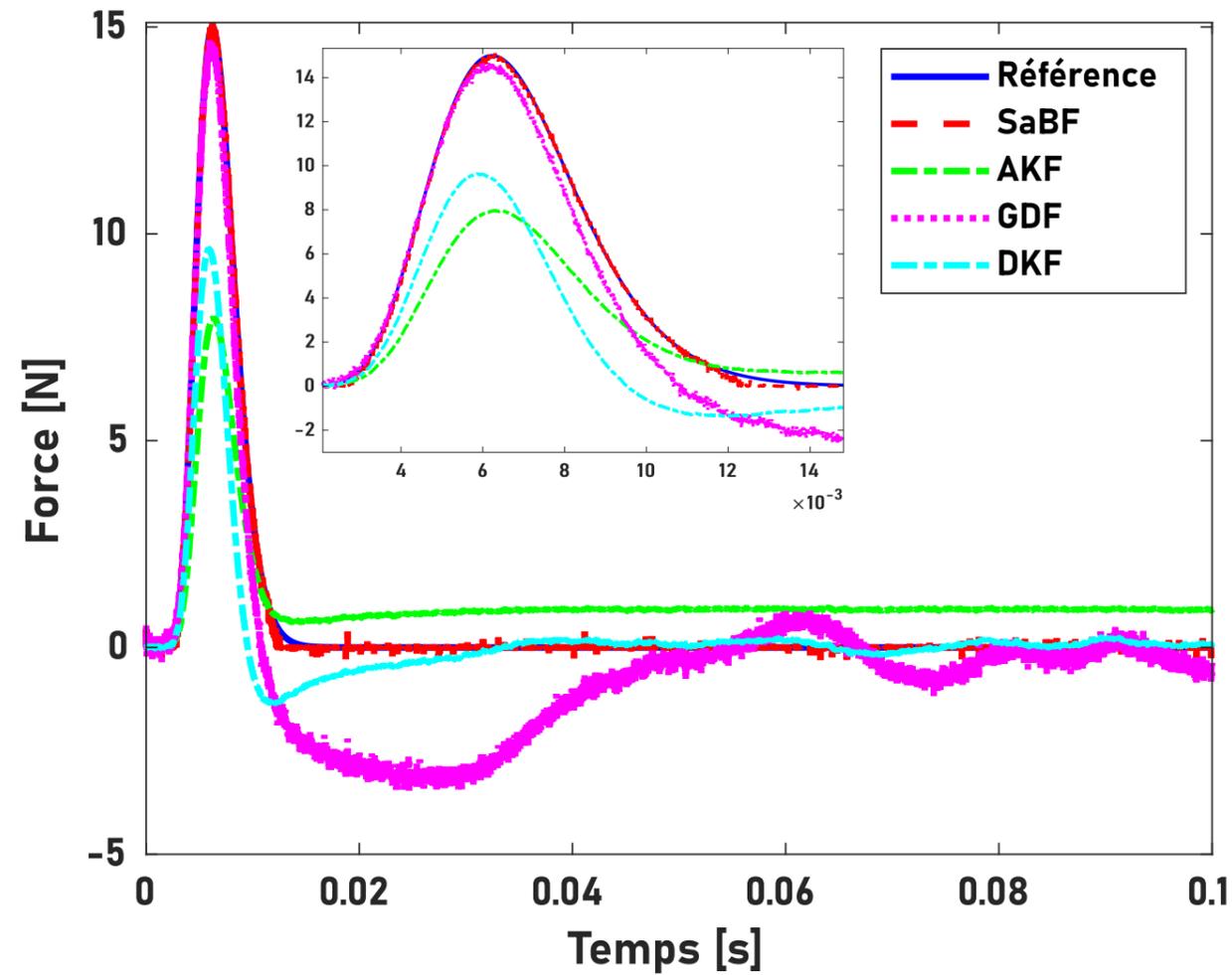
Sparse adaptive Bayesian Filter Comparaisons - Moyenne

Application Configuration 1



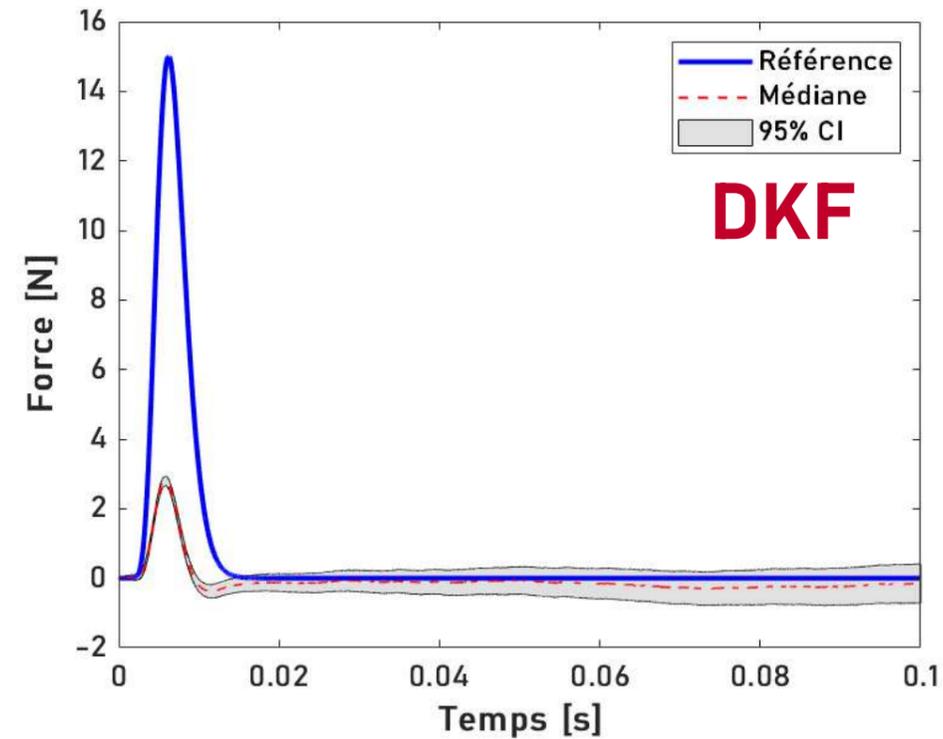
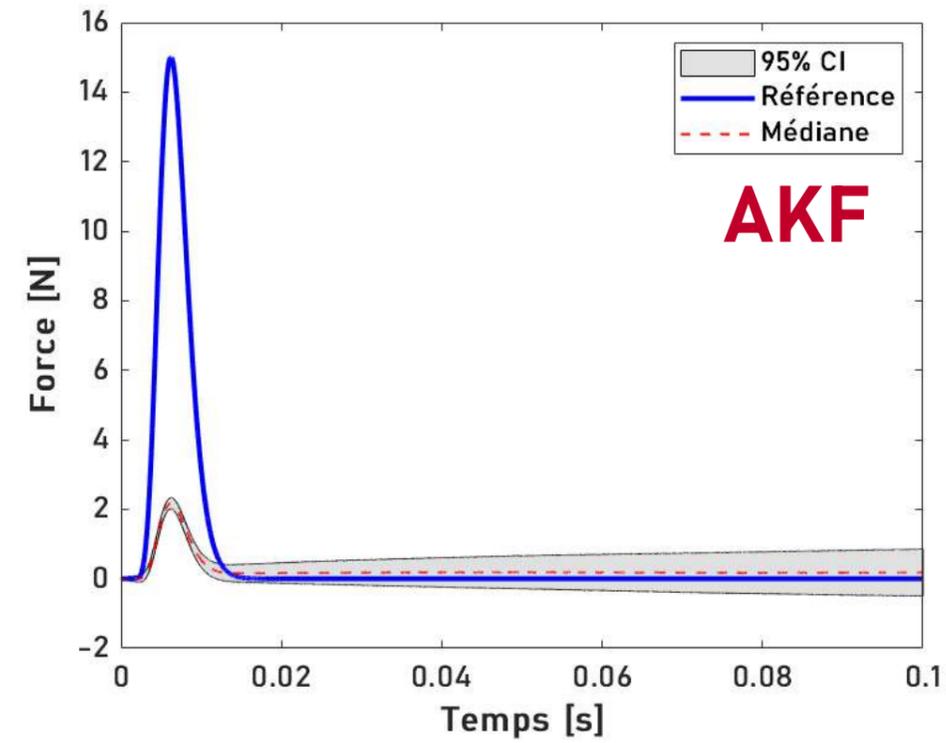
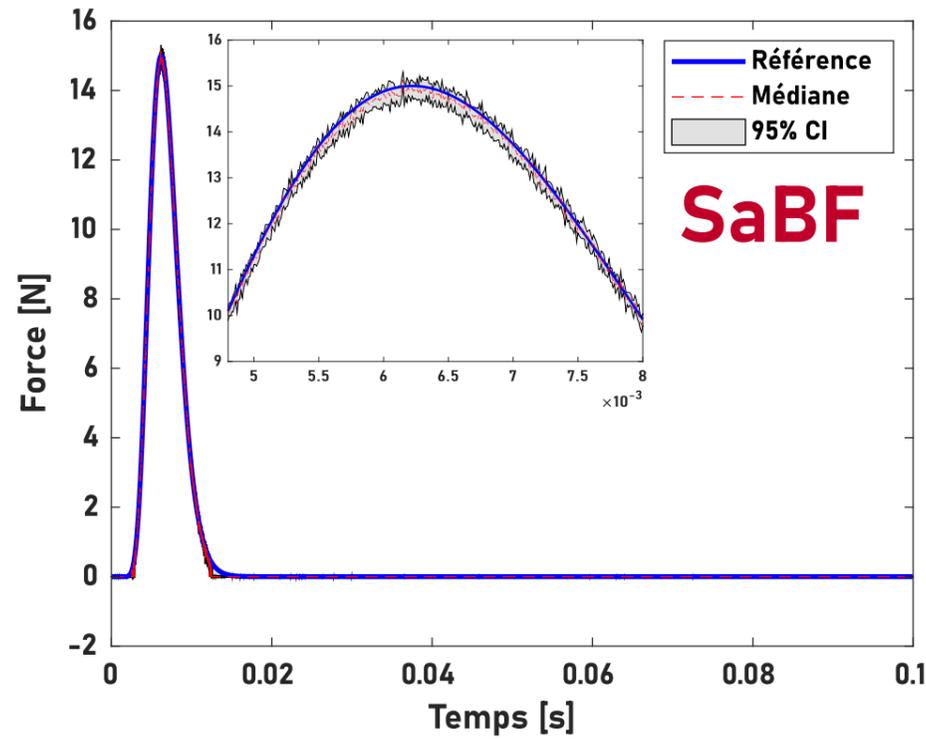
Sparse adaptive Bayesian Filter Comparaisons - Moyenne

Application Configuration 2



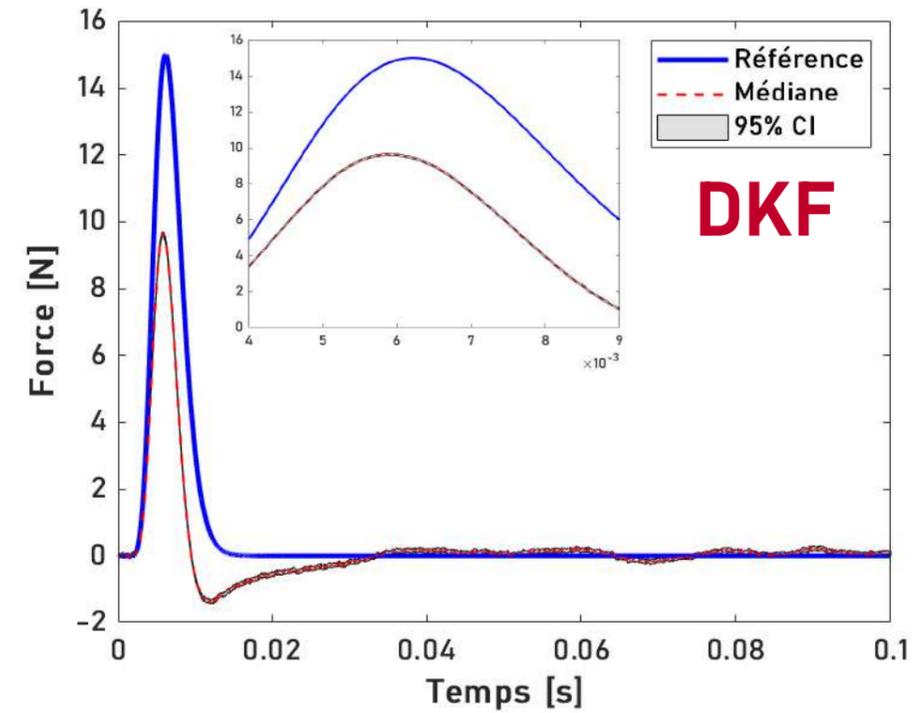
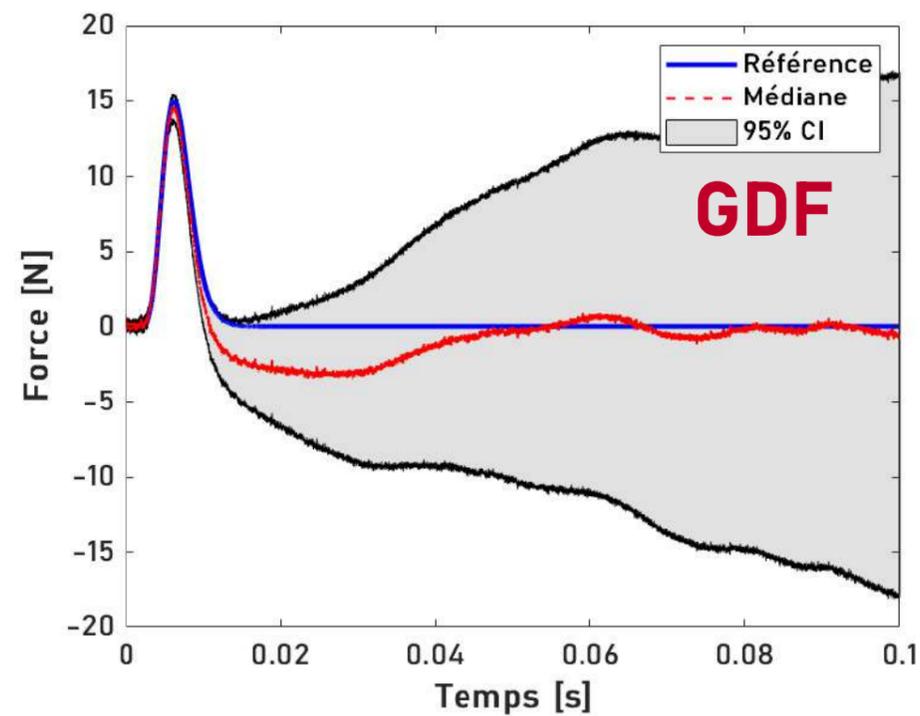
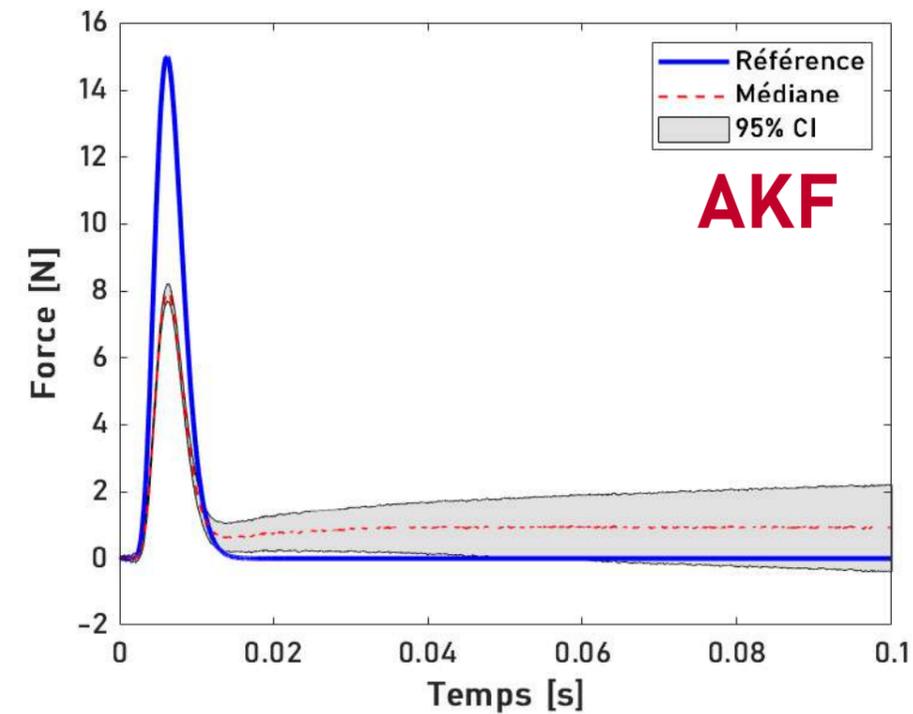
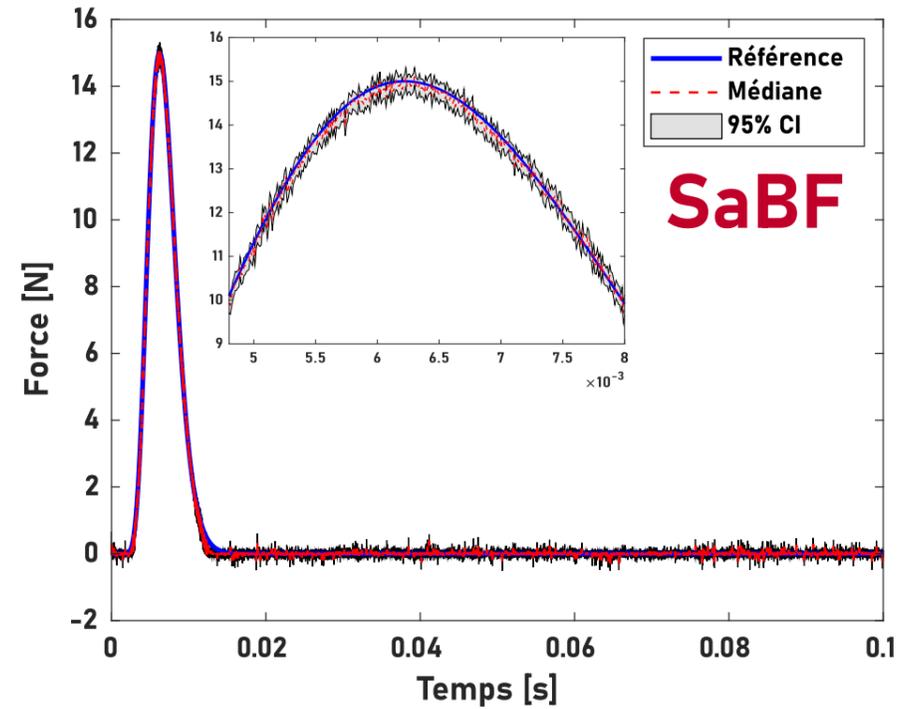
Sparse adaptive Bayesian Filter Comparaisons - Incertitude a posteriori

Application Configuration 1



Sparse adaptive Bayesian Filter Comparaisons - Incertitude a posteriori

Application Configuration 2



Conclusions

- Le paradigme Bayésien permet d'unifier les principaux filtres de la littérature
- Un nouveau filtre Bayésien parcimonieux a été proposé
- Aucune procédure externe n'est requise pour estimer les paramètres du problème
- Comparaison du filtre proposé avec ceux de la littérature (moyenne + incertitude a posteriori)
- Le filtre présenté permet de résoudre les problèmes de lissage et de dérive classiquement observés

Extensions

- Utiliser d'autres distributions prédictives $p(\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$
- Développer un filtre Bayésien conjoint parcimonieux
- Adapter le formalisme à d'autres représentation d'état (sans \mathbf{D})
- Développer un lisseur Bayésien parcimonieux (équivalent au lisseur RTS)
- Débruitage en ligne ou hors-ligne



Filtre Bayésien parcimonieux

Application à l'identification d'effort

Discrétisation ZOH

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Pour un système projeté sur base modale, on a :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}_n^2 & -\mathbf{Z}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{\Phi}_n^\top \mathbf{S}_u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_a \mathbf{\Phi}_n \mathbf{\Omega}_n^2 & -\mathbf{S}_a \mathbf{\Phi}_n \mathbf{Z}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{S}_a \mathbf{\Phi}_n \mathbf{\Phi}_n^\top \mathbf{S}_u$$

Après discrétisation, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{A}_c h}, & \mathbf{B} &= [\mathbf{A} - \mathbf{I}] \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_c, & \mathbf{D} &= \mathbf{D}_c \end{aligned}$$

[Retour à la présentation](#)